



Dynamique non-linéaire et hors-équilibre des membranes lipidiques confinées

Thomas Le Goff

► To cite this version:

Thomas Le Goff. Dynamique non-linéaire et hors-équilibre des membranes lipidiques confinées. Physique [physics]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2015. Français. NNT: 2015LYO10245 . tel-01286974

HAL Id: tel-01286974

<https://theses.hal.science/tel-01286974>

Submitted on 11 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE CLAUDE BERNARD-LYON 1

INSTITUT LUMIERE MATIERE

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD

Discipline : Physique

Présentée par

Thomas LE GOFF

Dynamique non-linéaire et hors-équilibre des
membranes lipidiques confinées

Soutenue publiquement le 3 décembre 2015 devant le jury composé de

M. DAUXOIS Thierry	Président du jury
M. PIERRE-LOUIS Olivier	Directeur de thèse
M. FRISCH Thomas	Rapporteur
M. MARQUES Carlos	Rapporteur
M. BIBEN Thierry	Examineur
M. BICKEL Thomas	Examineur
M. POLITI Paolo	Examineur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon encadrant Olivier Pierre-Louis pour la très grande qualité de son encadrement et sa disponibilité. Ces trois années de thèse ont été un réel plaisir et m'ont convaincu dans ma volonté de continuer dans la recherche. Un grand merci également à Paolo Politi avec qui nous avons travaillé en collaboration. J'ai eu la chance avec Olivier Pierre-Louis d'aller le rencontrer deux fois dans la très jolie ville de Florence et je le remercie pour le très bon accueil qu'il nous a à chaque fois réservé. Merci aussi à Anthony Troger dont j'ai co-encadré le stage de L3 pour les calculs pénibles qu'il a du réaliser. Je remercie de plus Tung To qui prend la suite de mon travail et lui souhaite bon courage pour l'optimisation des temps de calcul.

Je remercie aussi tous les membres du jury pour avoir accepté d'en faire partie et pour la lecture de mon manuscrit qui je l'espère n'aura pas trop été pénible.

Je tiens également à remercier mes anciens collègues thésards qui sont maintenant partis mais qui ont égayé mon quotidien durant la thèse : Maxime Ignacio et son fameux tour du square Evariste Galois, Julien Lombard et ses poumons d'or, Alexandre Marciniak avec qui j'ai partagé la plupart de mes déjeuners ainsi que Céline Ortéga pour les pauses cafés. Les soirées au Croco et à la "démarrante" avec eux resteront également de très bons souvenirs.

Je remercie également les membres de l'équipe MMCI au sein de laquelle j'ai trouvé très agréable de travailler. Je remercie les membres du projet ANR Biolub avec qui nous avons collaboré. Je remercie le service informatique (Ruben Mascart et Fabio Rampoldi) que j'ai parfois sollicités pour des problèmes de débutants mais sont restés malgré tout très disponibles. Je remercie les services administratifs (Christelle Macheboeuf, Delphine Kervella et Laura Fouilloux) pour leur efficacité.

Enfin je remercie les personnes qui m'ont accordé leur confiance pour les enseignements : Christophe Bonnet, Emmanuel Bénichou, Daniel Guinet, Joël Bellessa, Hubert Hansen et Houmani El Mamouni.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Contexte	1
1.2	Systèmes bistables	4
1.3	Contribution	6
1.4	Physique des membranes lipidiques	8
1.4.1	Structure moléculaire d'une membrane lipidique	8
1.4.2	Conservation de l'aire	9
1.4.3	Energie de courbure	10
1.4.4	Forces externes agissant sur la membrane	11
2	Présentation du modèle bidimensionnel	15
2.1	Système étudié	15
2.1.1	Présentation du système	15
2.1.2	Equation du fluide	16
2.1.3	Conditions aux limites	17
2.1.4	Forces subies par la membrane	18
2.2	Dérivation de l'équation d'évolution	19
2.2.1	Approximation de lubrification	20
2.2.2	Une membrane entre deux murs plans	22
3	Adhésion d'une membrane 1D confinée entre deux murs plans	25
3.1	Limite des murs très perméables : cas non-conservé	26
3.1.1	Equation d'évolution	26
3.1.2	Relation de dispersion non discriminante	27
3.1.3	Dynamique gelée et état désordonné	28
3.2	Limite des murs imperméables : cas conservé	29
3.2.1	Relation de dispersion sélective	31
3.2.2	Dynamique gelée et état ordonné	32
3.3	Etude des états stationnaires et critère de stabilité pour les états stationnaires périodiques	33
3.3.1	Oscillation des solutions stationnaires	33
3.3.2	Critère de stabilité général pour les états stationnaires périodiques dans les systèmes variationnels 1D	35
4	Modèle de kinks	41

4.1	Présentation du modèle de K. Kawasaki et T. Ohta	42
4.2	Dérivation d'un nouveau modèle	45
4.3	Comparaison des deux modèles par simulation	49
4.4	Etude de stabilité des états stationnaires	50
5	Robustesse des états gelés et transition vers le mûrissement	55
5.1	Influence de la tension ς de la membrane	55
5.1.1	Tension critique	56
5.1.2	Etats stationnaires avec tension	57
5.1.3	Transition vers le mûrissement	58
5.2	Potentiel asymétrique	63
5.2.1	Dynamique d'une membrane dans un potentiel asymétrique	63
5.2.2	Vitesse de déplacement des kinks	64
5.2.3	Tailles d'équilibre des domaines d'adhésion	65
5.3	Bruit thermique	67
5.3.1	Dynamique de kinks avec forces de Langevin	67
5.3.2	Activation du mûrissement	73
6	Cisaillement d'une membrane 1D confinée entre deux murs plans im-	77
	perméables	
6.1	Dynamique de la membrane	77
6.1.1	Faibles vitesses : mûrissement, chaos et plateaux transitoires	80
6.1.2	Vitesses intermédiaires : états cellulaires	81
6.1.3	Limites des grandes vitesses : chaos spatio-temporel	81
6.1.4	Transition du mûrissement vers les états cellulaires périodiques	87
6.2	Force de friction	88
6.2.1	Expression de la force de friction	90
6.2.2	Evolution de la force en fonction de la vitesse de cisaillement	91
6.2.3	Limite des grandes vitesses	91
6.2.4	Rhéofluidification et stick-slip	94
7	Extension du problème d'adhésion à une membrane bidimensionnelle	99
7.1	Système étudié	99
7.1.1	Forces en présence	99
7.1.2	Equation d'évolution dans la limite de lubrification	101
7.1.3	Cas des murs plans	103
7.2	Premiers résultats pour le cas non-conservé	106
7.2.1	Schéma numérique	106
7.2.2	Formation de rides et mûrissement ?	107
8	Conclusion et perspectives	111
A	Dérivée fonctionnelle de l'énergie de la membrane	113
A.1	Eléments de géométrie différentielle	113
A.2	Cas de la membrane unidimensionnelle	115
A.3	Cas de la membrane bidimensionnelle	116

B	Détail de la dérivation des équations d'évolution	119
B.1	Cas de la membrane unidimensionnelle avec des murs plans	119
B.2	Cas de la membrane bidimensionnelle avec des murs rugueux	121
C	Calcul du critère de stabilité pour un état stationnaire périodique	127
C.1	Méthode de l'équation de phase	127
C.1.1	Cas non-conservé	128
C.1.2	Cas conservé	129
C.1.3	Critère de stabilité	131
C.2	Calcul de la variation d'énergie des états stationnaires H_λ	131
D	Dérivation des modèles de kinks	135
D.1	Modèle de Kawasaki et Ohta	135
D.1.1	Cas non-conservé	135
D.1.2	Cas conservé	138
D.2	Nouveau modèle	140
E	Généralisation du système sous cisaillement	145
E.1	Cas des murs rugueux	145
E.1.1	Système étudié et équation d'évolution	145
E.1.2	Force de friction	147
E.1.3	Premiers résultats	148
E.2	Empilement de N membranes cisillées par deux murs plans imperméables	149
E.2.1	Système étudié	149
E.2.2	Equation d'évolution	151
	Index des notations	157
	Bibliographie	162

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte

Les membranes lipidiques forment un élément essentiel des milieux biologiques, nous les trouvons dans plusieurs familles de systèmes. Tout d’abord, elles sont l’élément principal de la paroi des cellules [8]. Sur la figure 1.1 nous pouvons voir le schéma d’une paroi cellulaire. Sur la figure 1.2 nous avons une image par microscopie électronique à balayage d’un exemple de cellule qui assure le transport du dioxygène, les globules rouges. Ces membranes jouent le rôle de frontière séparant le milieu intracellulaire comprenant le noyau, lorsque la cellule en a un, et le cytoplasme [57] de l’environnement extracellulaire. Le cytoplasme est formé d’éléments divers tels que le cytosquelette qui organise la forme et les mouvements de la cellule, et l’appareil de Golgi où nous trouvons aussi des membranes lipidiques.

En tant que paroi cellulaire, les membranes sont en interaction avec le milieu extérieur soit directement, soit par l’intermédiaire des protéines membranaires (figure 1.1). Ces protéines peuvent servir de récepteurs pour capter des hormones ou des neurotransmetteurs par exemple [79]. Elles peuvent également être un lieu d’échange par exemple via les aquaporines qui gèrent le flux d’eau à travers la membrane [68]. Enfin elles servent aussi à créer des liens avec d’autres cellules par des liaisons de type ligand/récepteur [56, 105]. Par ailleurs, les membranes sont sujettes à de nombreuses interactions physiques avec leur environnement. Elles sont d’origine électrostatique [36], entropique [2, 35, 62] ou osmotique [36], auxquelles s’ajoutent les interactions de Van der Waals [43] et d’hydratation [94].

Les vésicules, dont l’étude s’est beaucoup développée à partir des années 70, forment un système modèle pour les cellules. Une vésicule est une membrane lipidique simple fermée, c’est-à-dire une cellule sans protéines membranaires à laquelle nous aurions enlevé tout le milieu intracellulaire pour n’y laisser que du fluide. Nous obtenons ainsi un objet plus simple et reproductible par les expérimentateurs, et dont le comportement est plus facile à interpréter et à modéliser. Il n’y a plus à prendre en compte la dynamique complexe du cytosquelette par exemple. Les chercheurs ont ainsi pu explorer plus aisément les propriétés mécaniques des cellules et notamment montrer que la dynamique d’une membrane lipidique est gouvernée par sa rigidité de courbure [34]. Les modèles décrivant les membranes à partir de leur énergie de courbure [15, 34] ont par exemple permis la

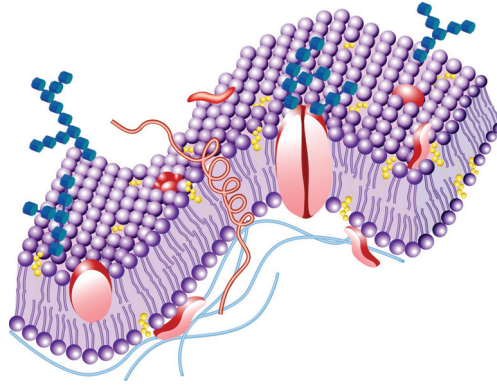


FIGURE 1.1 – Schéma d’une membrane lipidique cellulaire en violet avec les protéines membranaires accrochées à celle-ci puis le cytosquelette représenté par les filaments bleus sous la membrane.

compréhension de la forme si particulière en disque biconcave des globules rouges. Ces modèles, en accord avec les expériences, prédisent les formes que peuvent prendre les vésicules [24].

Les vésicules ont également été utilisées pour étudier l’adhésion des cellules sur un substrat [80]. Des expériences cherchant à reconstituer l’adhésion en prenant en compte l’effet du glycocalyx [12, 89], sorte de manteau de protection des membranes de certaines cellules, mettent en évidence un potentiel d’adhésion double puits. Ce potentiel traduit la compétition entre l’adhésion sur le substrat et la répulsion du glycocalyx. Un potentiel double puits apparaît également dans l’adhésion entre cellules ayant deux longueurs possibles de liens ligand-récepteur [1, 105], comme pour les cellules immunitaires T par exemple [25, 85]. Nous pouvons de plus concevoir l’adhésion cellulaire comme la compétition entre l’adhésion sur un substrat et l’adhésion sur le cytosquelette [11, 76, 93]. Dans ces situations variées, la membrane lipidique est confinée dans un potentiel double puits. Comprendre la dynamique des membranes confinées en présence d’un potentiel double puits est l’un des buts majeur de cette thèse.

Nous savons de plus que lors de l’adhésion cellulaire, la taille des domaines d’adhésion est limitée. Plusieurs explications ont été proposées pour ce phénomène. Premièrement, le regroupement des paires ligand/récepteur dans les domaines d’adhésion mène à une saturation de la taille des domaines [7, 82]. En effet, les liaisons se concentrant au même endroit, les régions alentour sont pauvres en liaisons et les fluctuations de la membrane suffisent pour la décoller du substrat. Le désordre de l’environnement a également été proposé pour expliquer la limitation de la taille des domaines d’adhésion. T. Speck et R.L.C. Vink ont développé un modèle d’une cellule adhérant soit sur une autre cellule soit sur la matrice extracellulaire par des liaisons de type-ligand/récepteur [93]. Ils trouvent qu’une distribution aléatoire de points d’attache avec le cytosquelette qui retient la membrane limite la taille des domaines d’adhésion. Ensuite, le remodelage du cytosquelette en forme de doigts au niveau de la membrane est une autre hypothèse avancée pour ce phénomène [22]. Nous verrons dans ce manuscrit qu’un modèle permettra de retrouver que la taille de ces domaines d’adhésion est limitée dans un modèle minimal impliquant la rigidité de

1.1. CONTEXTE

courbure et le confinement dans un potentiel double puits.

Les membranes lipidiques sont aussi observées dans d'autres systèmes biologiques comme le stratum corneum de la peau [21, 37], ou au sein des systèmes de biolubrification. Par exemple dans les articulations, les paupières [38] ou encore dans les alvéoles pulmonaires. Dans ces systèmes de biolubrification les membranes se trouvent sous forme d'empilement comme nous pouvons le voir sur la figure 1.2. De plus, dans les empilements, les interactions membrane-membrane peuvent être attractives pour des raisons physiques ou chimiques. Si la distance entre les membranes est plus grande que la distance d'équilibre (empilement très hydraté), chaque membrane pouvant adhérer à l'un ou l'autre de ses voisins se retrouve dans une situation analogue à celle d'une membrane dans un potentiel double puits. Cependant, des effets collectifs plus complexes mettant en jeu la déformation de plusieurs membranes peuvent aussi avoir lieu.

Dans la biolubrification les membranes lipidiques sont soumises à un cisaillement. Nous chercherons à étudier leur réponse au cisaillement et leur influence sur le frottement. Il a été montré grâce aux travaux de C.W. McCutchen [63] et de D.A. Swann et al [95] que pour les articulations humaines, le coefficient de friction qui est le rapport entre la force tangentielle et la force normale au sens du mouvement est très faible ($\approx 0,001 - 0,05$). Les prothèses de genou actuelles ont un coefficient de friction de 0,01 pour les meilleurs matériaux mais avec une durée de vie d'une dizaine d'années [73]. Les systèmes naturels peuvent donc avoir un coefficient de frottement dix fois plus faible avec une durée de vie bien plus longue. Il serait extrêmement intéressant de comprendre comment diminuer les frottements pour améliorer l'efficacité et diminuer l'usure de ces prothèses. La diminution du coefficient de frottement demeure une question cruciale pour l'élaboration de prothèse. Cependant les différents processus physico-chimiques qui mènent à ces faibles frottements dans la biolubrification sont encore mal compris. Plusieurs études expérimentales [18] suggèrent que les membranes lipidiques jouent un rôle majeur dans les mécanismes de biolubrification, ces travaux sont une de nos motivations pour l'étude des membranes confinées sous cisaillement. La question de la lubrification est également très présente dans le domaine de l'industrie car les pertes dues aux frottements ont un coût très élevé. Pour donner un ordre d'idée, lors d'un trajet en voiture, un tiers du carburant est gaspillé simplement à cause des frottements [40]. Les systèmes biologiques pourraient inspirer de nouvelles solutions pour la réduction des frottements pour de nombreuses machines ou dispositifs artificiels.

Les études de cisaillement des membranes lipidiques ont beaucoup concerné les cellules dans le but de mieux comprendre le déplacement des globules rouges dans le sang notamment. Le sang, par viscosité, va cisailer les globules et ainsi changer leur morphologie [45, 88, 100]. Le cisaillement d'un empilement de membranes lipidiques [32, 84] a également été étudié expérimentalement. Il existe alors plusieurs phases possibles [84]. A faible cisaillement, nous avons un empilement avec défauts de type dislocation. Puis si nous augmentons le taux de cisaillement nous avons formations de sphères, elle est appelée la phase "oignon". Finalement, aux forts taux de cisaillement, nous avons une phase lamellaire sans défauts. Dans le cadre de cette thèse, nous nous focaliserons sur la limite du confinement où une membrane unique est cisailée entre deux murs. Nous mettrons en évidence le rôle non trivial de la rigidité de courbure dans ces géométries confinées.

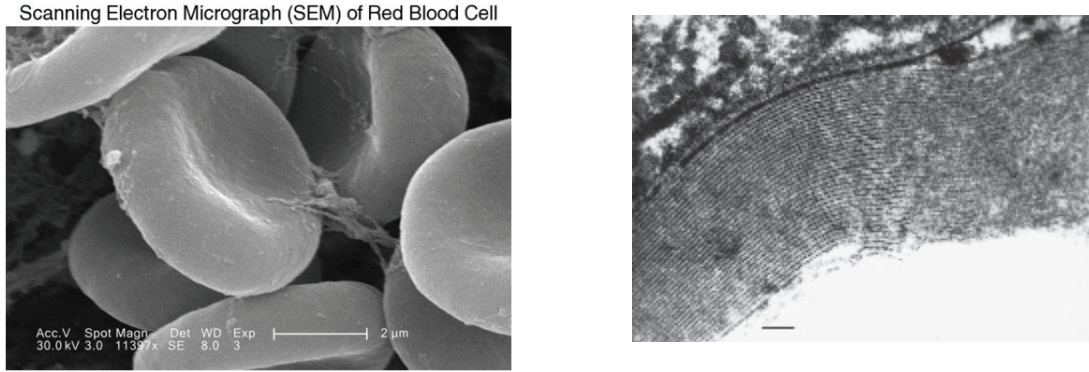


FIGURE 1.2 – A gauche, image par microscopie électronique à balayage de globules rouges, la barre blanche correspond à $2\ \mu\text{m}$. A droite, image par microscopie électronique d'un empilement de membranes lipidiques sur la surface d'un poumon, la barre noire correspond à $50\ \text{nm}$.

1.2 Systèmes bistables

Comme mentionné précédemment, les systèmes biologiques mettant en jeu les membranes lipidiques avec deux états possibles d'adhésion sont multiples. Un parallèle peut être fait avec les systèmes bistables, ce sont des systèmes relaxant vers l'équilibre, pour lesquels il y a coexistence de deux phases (analogues aux deux états d'adhésion de la membrane pour notre problème). Il faut se situer dans une zone du diagramme de phase où la coexistence de deux phases est possible. Cette situation peut être obtenue expérimentalement à l'aide d'une trempe : le système est préparé à haute température dans un état homogène, puis est refroidi brutalement. Le phénomène de décomposition spinodale est alors observé, le système se sépare en domaines distincts dans lesquels il n'y a qu'une seule phase. Ce phénomène se différencie de la nucléation par le fait qu'une simple perturbation permet la séparation en domaines, alors que la nucléation nécessite un apport d'énergie.

Les systèmes magnétiques, basés sur une description en terme de spins, peuvent être cités comme exemple. Les deux phases possibles sont "up", spins dirigés vers le haut ou "down", spins dirigés vers le bas. Nous pouvons également mentionner les alliages binaires [52] ou les fluides binaires [90], composés par exemple d'atomes A et B. Il peut apparaître la coexistence de zones riches en atome A avec des zones riches en atome B [14, 52]. Les systèmes de réaction-diffusion, comme les réactions chimiques de type $A \leftrightarrow B$, peuvent aussi être des systèmes bistables.

Nous allons présenter une description continue de ces systèmes à l'aide d'un formalisme à la Landau. Nous définissons un paramètre d'ordre h (la hauteur de la membrane pour notre problème) qui prend deux valeurs opposées dans chacune des phases. Pour un ensemble de spins, le paramètre d'ordre vaudra 1 pour un spin "up" et -1 pour un spin "down" par exemple. La description étant continue, le paramètre d'ordre peut prendre des valeurs intermédiaires. La dynamique de ces systèmes est généralement dérivée à partir de son énergie libre $\mathcal{F}[h]$ qui décroît au cours du temps [13, 39]. L'équation vérifiée par le

1.2. SYSTÈMES BISTABLES

paramètre d'ordre est

$$\partial_t h = -\frac{\delta \mathcal{F}[h]}{\delta h} \quad (1.1)$$

ou

$$\partial_t h = \Delta_{2D} \frac{\delta \mathcal{F}[h]}{\delta h} \quad (1.2)$$

selon que le paramètre d'ordre moyen est conservé (équation (1.2)) ou non (équation (1.1)). Nous utilisons l'opérateur $\Delta_{2D} = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ avec x et y les coordonnées cartésiennes selon lesquelles varie h . Ces équations sont connues de la littérature comme l'équation de Ginzburg-landau dépendant du temps (TDGL) et l'équation de Cahn-Hilliard (CH).

Pour tous les systèmes présentés ci-dessus dans cette section, l'énergie libre est composée de deux termes. Un terme de potentiel $\mathcal{U}(h)$ qui est typiquement un double puits dont les deux minimums correspondent aux deux états possibles. Dans un système où le paramètre d'ordre varie spatialement, un développement aux grandes longueurs d'onde indique que la correction dominante de la densité d'énergie libre est proportionnelle au carré du gradient du paramètre d'ordre, ce qui constitue le deuxième terme. L'énergie libre est donc de la forme

$$\mathcal{F}[h] = \iint dx dy \left[\mathcal{U}(h) + \frac{\varsigma}{2} (\nabla h)^2 \right], \quad (1.3)$$

avec ς un paramètre du système naturellement associé à la tension de surface entre les deux phases.

La dynamique de ces systèmes, dans la limite des grandes tailles, donne lieu à du mûrissement, ou coarsening en anglais. Des domaines à paramètre d'ordre constant sont créés et vont fusionner et s'accroître jusqu'à tendre vers un état final homogène. La taille typique des domaines croît en $\ln t$ pour une interface 1D. La croissance est en $t^{1/2}$ pour l'équation (1.1) et en $t^{1/3}$ pour l'équation (1.2) pour une interface 2D.

Plus loin dans ce manuscrit, nous verrons que pour une membrane lipidique, et dans la limite des grandes longueur d'ondes, l'énergie libre a une forme différente

$$\mathcal{F}[h] = \iint dx dy \left[\mathcal{U}(h) + \frac{\kappa}{2} (\Delta h)^2 \right], \quad (1.4)$$

où κ est la rigidité de courbure de la membrane. Cette énergie libre apparaît également lorsque le système atteint un point de Lifshitz, i.e. un point du diagramme de phase où la tension de surface ς s'annule [41].

La dynamique s'en trouvera modifiée, le mûrissement disparaît pour un système bidimensionnel (membrane ou interface 1D). A une dimension, les états stationnaires pour l'énergie libre (1.3) sont tous périodiques et instables. Pour l'énergie libre (1.4) en revanche, les états stationnaires forment une famille beaucoup plus complexe, notamment avec une infinité de solutions métastables et spatialement chaotiques [19, 77]. Nous allons montrer plus loin que la cinétique peut choisir des chemins très différents à travers ce paysage énergétique complexe. Elle peut mener par exemple, pour les mêmes conditions initiales à 1D, soit à du désordre gelé pour l'équation (1.1), soit à un ordre gelé pour (1.2).

1.3 Contribution

Au cours de cette thèse nous avons étudié la dynamique des membranes confinées entre deux murs par des modèles de lubrification, particulièrement en présence d'un potentiel double puits menant à deux états possibles d'adhésion (sur le mur du haut, ou sur celui du bas). Nous avons étudié en détail les systèmes bidimensionnels, où la membrane est un objet unidimensionnel, puis nous avons abordé le cas tridimensionnel.

Dans le cadre des modèles bidimensionnels, nous avons tout d'abord obtenu une équation de lubrification non linéaire et non locale pour la dynamique d'une membrane confinée entre deux murs plans. La solution numérique de cette équation montre que la rigidité de courbure de la membrane mène à une dynamique spécifique et peu explorée pour les systèmes bistables (à part quelques travaux précurseurs [19]), très différente de la dynamique de mûrissement obtenue habituellement en présence d'une tension de surface. En effet, la membrane atteint rapidement une configuration gelée, qui dépend des conditions initiales. L'existence de ces états gelés est la conséquence d'une interaction oscillante entre les kinks définis ici comme parois de domaines dans les systèmes unidimensionnels, alors que ces interactions sont purement attractives en présence de tension. Nous avons montré que l'organisation spatiale de la configuration finale est contrôlée par la perméabilité des murs : par exemple, si la membrane est initialement plane, et à mi-chemin entre les deux murs (avec une petite perturbation aléatoire et blanche), des morphologies désordonnées sont obtenues pour des murs perméables, alors qu'un ordre à longue distance est obtenu dans le cas imperméable.

Nous avons compris ces résultats non seulement grâce à l'analyse de stabilité linéaire qui indique la sélection d'une longueur d'onde particulière uniquement dans le cas des murs imperméables, mais aussi grâce à une étude de stabilité des états stationnaires non linéaires. L'étude des états stationnaires est d'abord basée sur un critère général de stabilité des états stationnaires périodiques à 1D, que nous avons obtenu pour les systèmes décroissant une énergie (ou plus généralement pour les systèmes possédant une fonctionnelle de Lyapunov). Cette étude de stabilité des états stationnaires est poussée un peu plus loin grâce à un modèle de kinks, pour lequel nous pouvons montrer qu'il existe une infinité d'états stationnaires stables et désordonnés. Notre dérivation du modèle de kinks est différente des dérivations traditionnelles [48]. Elle montre que l'interaction entre kinks est proportionnelle non pas au profil asymptotique des kinks mais à leur carré, et indique l'existence de termes sous-dominants dans le cas conservé (murs imperméables). La supériorité de ce modèle par rapport aux modèles traditionnels est montrée numériquement par comparaison avec la solution des équations continues.

Nous avons ensuite montré que différents ingrédients physiques sont susceptibles de restaurer le mûrissement, généralement au dessus d'un seuil fini. Premièrement, la tension de membrane restaure le mûrissement au-dessus d'une valeur critique qui correspond à la disparition des oscillations des queues des kinks. Des ordres de grandeurs basés sur un potentiel d'interaction par les forces de Van der Waals indiquent que la tension critique est supérieure aux tensions habituelles extraites des expériences. Les états gelés pourraient donc subsister dans les expériences en présence de tension. Deuxièmement, nous avons étudié les conséquences d'un potentiel asymétrique, avec un puits plus bas que l'autre. Alors qu'elle n'a aucune conséquence dans le cas de murs imperméables, l'asymétrie peut

1.3. CONTRIBUTION

supprimer les états gelés dans le cas de murs perméables, et forcer toute la membrane à basculer dans le puits de plus basse énergie. Pour ce faire, l'asymétrie doit cependant dépasser une valeur finie, au-dessous de la quelle les domaines d'adhésion peuvent survivre dans le puits défavorable. La taille de ces domaines est prédite quantitativement par un modèle de kink. Les asymétries de certains potentiels expérimentaux [12, 89] semblent être du même ordre de grandeur que l'asymétrie critique, de sorte qu'il est peut-être possible d'observer la transition expérimentalement. Troisièmement, nous avons utilisé un formalisme de Langevin appliqué au modèle de kinks pour sonder l'effet des fluctuations thermiques sur la dynamique de la membrane. A température finie, nous obtenons toujours du mûrissement asymptotiquement à temps long, avec des exposants qui ne dépendent pas du fait que les membranes soient stabilisées par la rigidité de courbure ou par la tension. Cependant, le démarrage du mûrissement est activé thermiquement en présence de rigidité de courbure. Nous avons pu calculer quantitativement la barrière d'énergie liée à cette activation à partir de l'expression asymptotique de l'énergie d'interaction entre kinks.

Inspirés par la biolubrification, nous avons aussi étudié l'influence d'un cisaillement forcé par le mouvement de deux murs imperméables entre lesquels est placée une membrane. Les simulations montrent une dynamique riche de plusieurs régimes, qui influence la friction effective entre les murs. Pour les faibles taux de cisaillement, nous obtenons une dynamique complexe et chaotique qui engendre du mûrissement. Ceci se traduit par une diminution de la contribution de la membrane dans le frottement avec le temps, menant à un comportement thixotrope. Ce comportement est observé jusqu'à un cisaillement seuil, qui est interprété comme le seuil de stabilité des domaines d'adhésion étendus. Au dessus de ce seuil, pour des taux de cisaillement modérés, nous retrouvons des solutions stationnaires périodiques (comme en l'absence de cisaillement, mais avec une symétrie brisée). L'amplitude de ces solutions décroît avec le taux de cisaillement, ce qui induit une décroissance de la contribution de la membrane au frottement, menant à un comportement rhéofluidifiant. Pour les taux de cisaillement plus élevés, la dynamique présente un chaos spatio-temporel similaire à celui qui résulte de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky [50, 91]. Dans ce régime, la force de frottement liée à la présence de la membrane diminue comme $1/v_c^3$ lorsque l'on augmente la vitesse v_c de cisaillement. Nous obtenons ici encore un comportement rhéofluidifiant.

Dans la dernière partie de cette thèse, nous avons étendu notre approche aux systèmes tridimensionnels, et en présence de murs rugueux. Nous avons aussi ajouté la contrainte de conservation locale de l'aire membranaire, que nous avons formulée comme une conservation de la densité d'aire projetée. Dans l'approximation de lubrification, cette contrainte se traduit par une tension effective dépendant du temps, mais spatialement homogène et non locale. Les premiers résultats pour l'adhésion entre deux murs plans suggèrent que le mûrissement pourrait être restauré dans le cas des membranes bidimensionnelles, malgré les interactions oscillantes qui demeurent entre parois de domaine.

Ce travail de thèse a donné lieu à plusieurs collaborations. Notamment, les études de dynamiques de kinks ont été effectuées en collaboration avec Paolo Politi, chercheur du CNR à l'Istituto dei Sistemi Complessi à Florence. Certains résultats particuliers ont été obtenus grâce à ces collaborations : (i) la solution numérique des équations de kinks avec des forces de Langevin a été obtenue par P. Politi ; (ii) l'étude du cisaillement d'une

membrane unidimensionnelle entre deux murs rugueux a été développée lors du stage de L3 d'Anthony Troger co-encadré par moi-même ; (iii) la solution numérique par des méthodes implicites des équations des membranes bidimensionnelles et des membranes sous cisaillement est actuellement développée par Dr. Tung To, postdoctorant dans notre équipe.

Finalement, une partie des résultats présentés ici ont été publiés dans trois articles [53, 54, 55]. D'autres manuscrits sont en cours de préparation.

1.4 Physique des membranes lipidiques

1.4.1 Structure moléculaire d'une membrane lipidique

Comme son nom l'indique, une membrane lipidique est un objet constitué de lipides. Ce sont des molécules dites amphiphiles, c'est-à-dire constituées de deux parties distinctes : une tête polaire hydrophile, et une queue formée d'une ou plusieurs chaînes carbonées, hydrophobe car apolaire. Du fait de leur structure ces molécules ont tendance, en milieu aqueux, à s'organiser de telle sorte que la queue réduise son contact avec l'eau pour minimiser son énergie. Les lipides s'auto-assemblent alors en différentes structures. La plus simple est la micelle qui est une sphère où toutes les queues se rejoignent au centre. Cependant, lorsque la concentration de lipides est suffisamment élevée, les lipides ont plutôt tendance à former des structures bicouches plus stables. Nous avons alors des membranes formant une surface, et sous certaines conditions, nous pouvons obtenir des surfaces fermées appelées vésicules ou même des tubes. Différentes configurations sont représentées sur la figure 1.3. La taille de ces objets peut aller jusqu'à plusieurs dizaines de μm . Le phosphatidylcholine (PC) est la variété de lipides la plus abondante dans les cellules des mammifères. Il en existe plusieurs types : DPPC, DOPC, DMPC... La taille typique de ces lipides est d'environ 2 nm, la tête comptant pour environ le tiers de la taille totale de la molécule. L'épaisseur typique des bicouches est elle d'environ 5 nm.

Les deux phases les plus communes des membranes sont : la phase gel où les lipides sont quasiment fixes (le coefficient de diffusion est de l'ordre de $10^{-2} \mu\text{m}^2.\text{s}^{-1}$) et la phase liquide où les lipides peuvent diffuser le long de la membrane (avec un coefficient de diffusion de l'ordre de $10 \mu\text{m}^2.\text{s}^{-1}$). A l'état de phase gel, plusieurs sous-états existent, les lipides peuvent par exemple être perpendiculaires à la surface ou inclinés [49], les configurations possibles sont nombreuses et nous n'allons pas toutes les expliciter ici. Les températures de transitions de l'état gel vers l'état liquide varient énormément et peuvent aller de -60°C à 80°C selon la nature des lipides. La valeur de cette température dépend essentiellement de l'intensité des forces de Van der Waals entre les têtes lipidiques, de la longueur des queues des molécules et du nombre de doubles liaisons dans la chaîne carbonée qui constitue la queue [81]. Plus la chaîne carbonée est longue et plus la température de transition T_c est élevée. La gêne stérique augmente avec la longueur de la queue, et par conséquent la mobilité des lipides diminue. De plus, plus la chaîne carbonée contient de doubles liaisons et plus T_c est basse [17]. En effet, les doubles liaisons auront pour effet d'augmenter la distance entre lipides et d'ainsi diminuer les interactions entre les têtes. Pour avoir un ordre d'idée, l'ajout d'un carbone à la chaîne carbonée augmente la température de transition T_c d'environ 10°C et l'ajout d'une double liaison peut la diminuer de 50°C .

1.4. PHYSIQUE DES MEMBRANES LIPIDIQUES

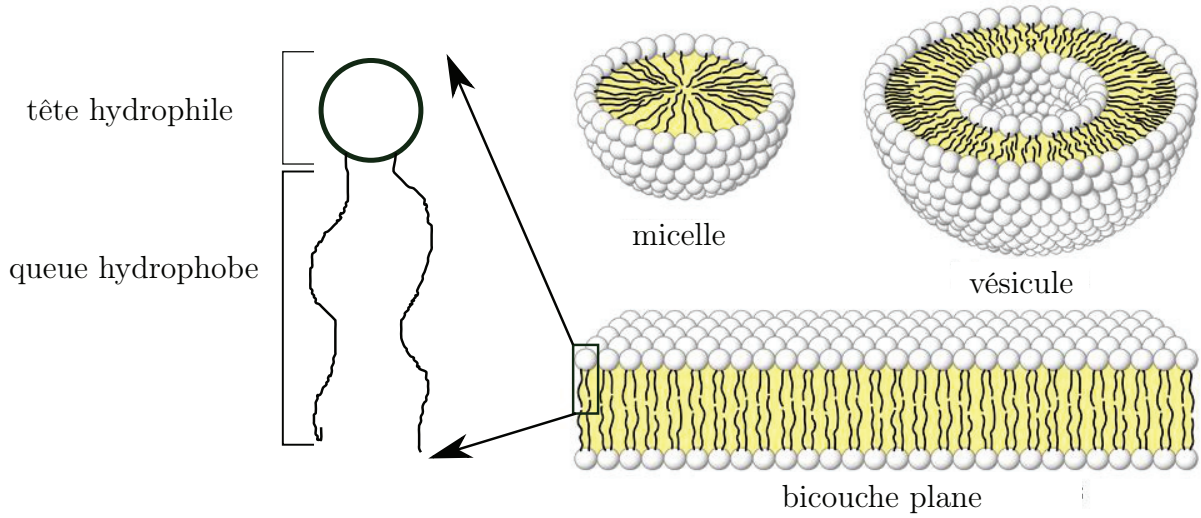


FIGURE 1.3 – A gauche, schéma d'un lipide. A droite, les différentes configurations possibles des lipides.

Les membranes peuvent être constituées par plusieurs types de lipides, la formation de domaines de lipides est d'ailleurs un thème de recherche actif [99].

Dans la suite nous ne prendrons pas en compte l'effet des changements de phase et considérerons une membrane sans épaisseur formée d'un seul type de lipides.

1.4.2 Conservation de l'aire

Connaissant désormais la structure d'une membrane lipidique, nous allons nous intéresser à ses propriétés élastiques. La plupart de ce manuscrit concerne les modèles unidimensionnels pour les membranes, cependant, afin de rester dans un cadre général, nous allons présenter les propriétés mécaniques d'une membrane bidimensionnelle.

La compression et l'extension d'une membrane lipidique dans la direction tangentielle à celle-ci, c'est-à-dire la diminution ou l'augmentation de l'aire d'une membrane plane, coûte de l'énergie dont la densité locale s'écrit

$$\mathcal{E}_{comp-ext} = \frac{1}{2}\chi \left(\frac{\Delta\mathcal{A}}{\mathcal{A}_0} \right)^2 \quad (1.5)$$

dans la limite $\Delta\mathcal{A} \ll \mathcal{A}_0$. χ est le module de compressibilité, $\Delta\mathcal{A}$ est la variation de l'aire et \mathcal{A}_0 est l'aire de la membrane au repos (voir figure 1.4). Le module de compressibilité est de l'ordre de $0,1 \text{ J.m}^{-2}$ [51]. Il est possible d'estimer l'élongation maximale à partir de laquelle la membrane se déchire [57]

$$\frac{\Delta\mathcal{A}_{max}}{\mathcal{A}_0} \approx 1\%. \quad (1.6)$$

Dans le cas des membranes liquides, la forme de la membrane peut être changée sans changement d'aire, c'est donc l'énergie de courbure qui domine la dynamique de ces membranes.

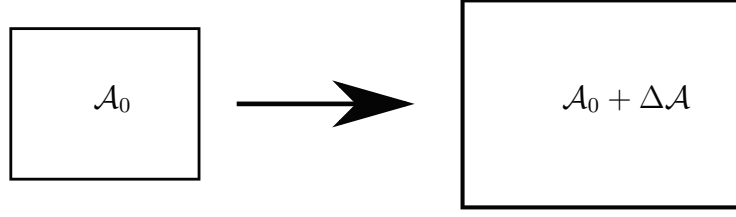


FIGURE 1.4 – Extension de la membrane dans la direction tangentielle à elle.

1.4.3 Energie de courbure

Nous allons présenter ici l'énergie de courbure d'une membrane lipidique. Les différents éléments géométriques utilisés ici sont présentés plus en détail dans la section A.1 de l'appendice.

Modèle de Helfrich 2D

Il est connu depuis les travaux de Helfrich [34] que la mécanique d'une membrane est dominée par son énergie de courbure qui s'exprime de la manière suivante

$$\mathcal{E}_\kappa = \iint d\mathcal{A} \left(\frac{\kappa}{2} (c_m - c_0)^2 + \frac{\kappa_G}{2} c_G \right), \quad (1.7)$$

où $d\mathcal{A}$ est l'élément d'aire, κ est la rigidité de courbure et κ_G est le module de courbure gaussienne. c_m est la courbure moyenne et c_0 est la courbure spontanée, c'est-à-dire la courbure que prend la membrane à l'équilibre. Cela peut apparaître dans les cas où les deux monocouches sont constituées de lipides différents ou quand il y a des insertions dans la membrane telle que des protéines [65]. Cette courbure spontanée sera prise nulle pour notre étude, car nous considérons une membrane avec un seul type de lipides et sans protéines membranaires.

Le théorème de Gauss-Bonnet nous dit que pour une surface ouverte nous pouvons écrire

$$\iint d\mathcal{A} c_G + \oint_{\partial} ds c_{\partial} = 2\pi \quad (1.8)$$

où ∂ désigne le contour de la membrane, c_{∂} la courbure de la courbe définie par le contour et s l'abscisse curviligne sur ce contour. Dans le cas d'une membrane périodique ou infinie, la deuxième intégrale est nulle et donc la contribution à l'énergie de la courbure gaussienne est constante, elle n'aura donc aucune influence sur la dynamique de la membrane. Ce terme sera négligé par la suite. En fait, la courbure gaussienne joue un rôle lorsque la membrane subit des changements topologiques. Dans le cadre de cette thèse, nous ne considérerons pas ce phénomène. Il ne reste donc que l'intégrale sur la surface de la courbure moyenne, qui est désormais notée c , au carré

$$\mathcal{E}_\kappa = \iint d\mathcal{A} \frac{\kappa}{2} c^2, \quad (1.9)$$

ce qui veut dire que l'énergie sera minimale pour une membrane plane. Cela va donc coûter de l'énergie de courber la membrane qui va tendre à s'aplanir.

1.4. PHYSIQUE DES MEMBRANES LIPIDIQUES

Nous considérerons aussi la tension de surface de la membrane dans le chapitre 5. Sa contribution à l'énergie de la membrane vaut

$$\mathcal{E}_\varsigma = \iint dA \varsigma, \quad (1.10)$$

où ς est la tension de surface de la membrane. L'origine physique de cette tension est débattue dans la littérature [29, 30], bien que l'analyse de nombreux résultats expérimentaux requièrent ce terme [36, 61]. Cette tension peut provenir par exemple de fluctuations thermiques, ou être d'origine entropique [28] ou simplement être une tension mécanique [87]. Nous considérons ici la tension ς comme une constante, sans avoir d'a priori sur son interprétation physique qui demeure délicate.

1.4.4 Forces externes agissant sur la membrane

Nous avons présenté jusqu'ici dans cette section les propriétés intrinsèques de la membrane, intéressons nous maintenant aux éventuelles actions extérieures déjà mentionnées dans l'introduction. Les différentes interactions possibles de la membrane avec le milieu extérieur sont nombreuses et variées, il y a :

- les forces de Van der Waals, qui peuvent être de trois natures différentes. Premièrement, il peut s'agir de la force de dispersion de London qui est généralement la composante la plus importante et attractive. Cette force met en jeu deux dipôles induits dont l'origine est la distribution propabiliste de la densité électronique d'une molécule. Ensuite, il peut y avoir la force de Keesom qui regroupe les interactions entre dipôles permanents. Et enfin, il reste les forces de Debye, ce sont les interactions entre un dipôle permanent et un dipôle induit. Ces différentes contributions sont décrites en détail dans le livre de J.N. Israelachvili [43]. L'énergie de l'interaction de Van der Waals entre deux atomes ou molécules identiques est en d^{-6} , où d est la distance entre les deux corps. L'énergie d'interaction entre un atome ou une molécule avec un substrat plan séparés de d est elle en d^{-3} . Par conséquent, l'interaction par unité d'aire d'une membrane avec un substrat plan vaut

$$V_{dW} \propto \frac{1}{d^3} \quad (1.11)$$

lorsque l'épaisseur de la membrane est petite devant la distance au substrat. Le facteur de proportionnalité appelé constante de Hamaker vaut typiquement 10^{-21} J pour une membrane lipidique sur un substrat.

- les interactions électrostatiques, car il se peut que les têtes lipidiques se ionisent. Des interactions, avec les ions présents dans le liquide, sur un substrat ou sur une autre membrane, peuvent alors intervenir. Cette interaction décroît exponentiellement à grande distance avec une longueur caractéristique appelée longueur de Debye λ_D

$$V_{elec} \propto \exp(-d/\lambda_D), \quad (1.12)$$

la longueur de Debye pour une membrane est quelques centaines de nm. Ce phénomène a été observé expérimentalement entre deux membranes par A. Hemmerle

et al [36], la force est alors répulsive, les ions étant identiques. La somme entre les interactions de Van der Waals et électrostatiques donnent lieu à la théorie DLVO [43].

- les pressions osmotiques qui interviennent lorsque les concentrations d’une même espèce chimique sont différentes de part et d’autre de la membrane, comme observé par A. Hemmerle et al [36].
- la force d’hydratation due au fluide entre la membrane et le substrat qui induit une force répulsive sur la membrane [43]. La nature exacte de cette force est encore mal comprise mais il semblerait qu’elle soit d’origine stérique. Son énergie d’interaction est en général modélisée par une décroissance exponentielle $\exp(-\alpha d)$ avec $\alpha^{-1} \simeq 2,5 \text{ \AA}$.
- la répulsion d’Helfrich qui est d’origine entropique [2, 35, 62]. En effet, sous confinement, une membrane possède moins de configurations possibles et son entropie diminue. Pour augmenter l’entropie, la membrane lipidique doit s’éloigner des substrats ou autres membranes, ce qui mène à une répulsion dont le potentiel est

$$V_{entrop} \propto \frac{(k_B T_{emp})^2}{d^2}. \quad (1.13)$$

- dans le cas d’une cellule, la répulsion du glycocalyx, sorte de manteau entourant celle-ci d’une épaisseur pouvant aller de 5 à 50 nm selon le type de la cellule. Cette répulsion est d’origine stérique et son effet sur les vésicules peut être simulé par une brosse de polymères dans les expériences comme pour les travaux de K. Sengupta et L. Limozin où le rayon de Flory des polymères est de 87 nm [89] ou les ceux de R. Bruinsma, A. Behrisch et E. Sackmann où le rayon de Flory est de 5 nm [12].
- l’action du cytosquelette d’une cellule qui peut s’accrocher à la membrane en certains points comme dans le modèle de T. Speck et R.L.C. Vink [93]. La membrane cellulaire peut s’accrocher ou se désolidariser du cytosquelette lors de la formation de blebs [11, 76].
- les liaisons ligand/récepteur qui peuvent se former entre deux membranes [12, 59]. L’énergie typique d’une liaison est quelques $k_B T_{emp}$ [7] et la concentration de ces ligands ou récepteurs peut aller jusqu’à $3500 \text{ molécules} \cdot \mu\text{m}^{-2}$ [59].

Le couplage de ces interactions peut amener à la formation de potentiel double puits. En effet, lors de l’adhésion d’une membrane sur un substrat par les forces de Van der Waals, le couplage avec la force d’hydratation, répulsive, donne un potentiel à un puits avec un minimum à quelques nm du substrat d’après les travaux de P.S. Swain et D. Andelman [94] (voir figure 1.5 en (a)). Deux murs suffisamment éloignés l’un de l’autre créent donc un potentiel double puits.

De plus, lors de l’étude de l’adhésion d’une vésicule unilamellaire géante sur un substrat recouvert d’un coussin de polymère faite par K. Sengupta et L. Limozin [89], il est possible d’obtenir un potentiel double puits en fonction de la concentration de polymères (voir figure 1.5 en (b)). La membrane est attirée vers le substrat via l’interaction de Van der Waals, en l’absence de polymères la répulsion est donc assuré par la force d’hydratation, la situation est similaire à celle de P.S. Swain et D. Andelman mentionné juste avant, nous avons un potentiel à un puits situé à quelques nm du substrat. En augmentant la concentration en polymères sur le substrat, ceux-ci augmentent la répulsion et un

1.4. PHYSIQUE DES MEMBRANES LIPIDIQUES

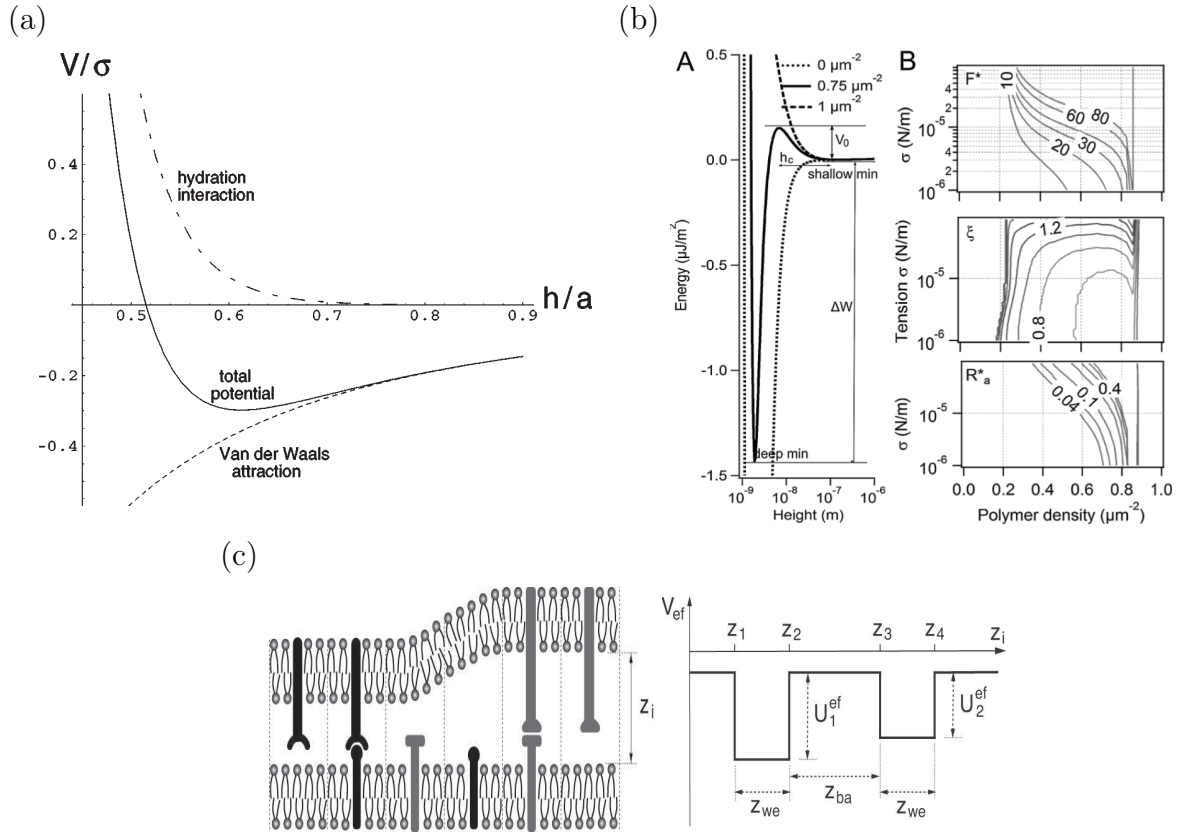


FIGURE 1.5 – (a) Potentiel en fonction de la distance h entre la membrane et le substrat obtenu dans l'article de P.S. Swain et D. Andelman [94] en prenant en compte les forces de Van der Waals et la force d'hydratation. La grandeur a vaut 4,93 nm et σ $1,7 \times 10^{-5} \text{ J.m}^{-2}$. (b) A gauche, potentiel double puits mesuré dans le papier de K. Sengupta et L. Limozin [89]. Ils étudient l'adhésion d'une vésicule géante sur un substrat avec un coussin de polymère qui simule l'effet du glycocalyx. (c) Représentation des liaisons type ligand/récepteur dans le cas où deux types de liaisons existent. A droite, le potentiel d'adhésion correspondant. cette figure est tirée de l'article de M. Asfaw et al [1].

deuxième puit apparaît dans le potentiel. Cette répulsion domine pour des concentrations supérieures à une molécule. μm^{-2} et il ne reste plus qu'un puits à quelques dizaines de nm du substrat.

Enfin, lors de l'adhésion de cellules par des liaisons de type ligand/récepteur il est également possible d'observer des potentiels double puits. Par exemple, pour les cellules T, il y a deux types de liaison qui se créent avec des longueurs respectives de 15 et 40 nm [25]. Ce type de systèmes a été modélisé par M. Asfaw et al [1] et un potentiel double puits a été en évidence (voir figure 1.5 en (c)).

Chapitre 2

Présentation du modèle bidimensionnel

2.1 Système étudié

Nous avons présenté les propriétés intrinsèques des membranes lipidiques ainsi que les forces d'interaction entre la membrane et son environnement. Présentons maintenant le modèle qui va être étudié dans ce manuscrit.

Tout au long de ce manuscrit les vecteurs seront repérés par des lettres en gras et les grandeurs physiques d'une partie du système au-dessus ou en dessous de la membrane seront notées avec les indices $+$ ou $-$ respectivement. De plus, dans cette partie, bien que le système soit à deux dimensions, nous garderons les mêmes notations pour les constantes physiques que celles qui ont été introduites dans l'introduction. Les constantes peuvent donc avoir des dimensions différentes. Par ailleurs, les conditions aux limites considérées seront toujours périodiques.

2.1.1 Présentation du système

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, les systèmes comprenant des membranes confinées sont multiples. Notre but est de modéliser ces systèmes et de capturer l'essentiel de la dynamique d'une membrane confinée. Pour commencer, nous allons étudier en particulier l'effet de la rigidité de courbure et montrer qu'elle mène à un comportement spécifique qui diffère de celui observé habituellement pour les interfaces avec présence de tension. Pour mettre en évidence ces effets nous commençons par étudier un système 2D avec une membrane unidimensionnelle sans tension de surface. Dans les chapitres qui suivront, nous rajouterons des ingrédients physiques afin de tester la robustesse de nos résultats.

Cette membrane est confinée entre deux murs parfaitement plans et identiques qui interagissent avec la membrane comme nous le verrons plus tard. Entre ces murs et la membrane se situe un fluide incompressible de viscosité μ et de masse volumique ρ . Le système est représenté sur la figure 2.1. Les murs sont séparés de $2h_0$ et la hauteur de la membrane est repérée par $h(x, t)$. La pression dans le fluide au-dessus ou en dessous de la membrane est notée p_{\pm} respectivement. La pression p_{ext} de l'extérieur du système est elle fixée et sera une constante. De plus, la membrane peut être considérée comme imperméable, les échelles de temps sur lesquelles le fluide traverse la membrane sont très

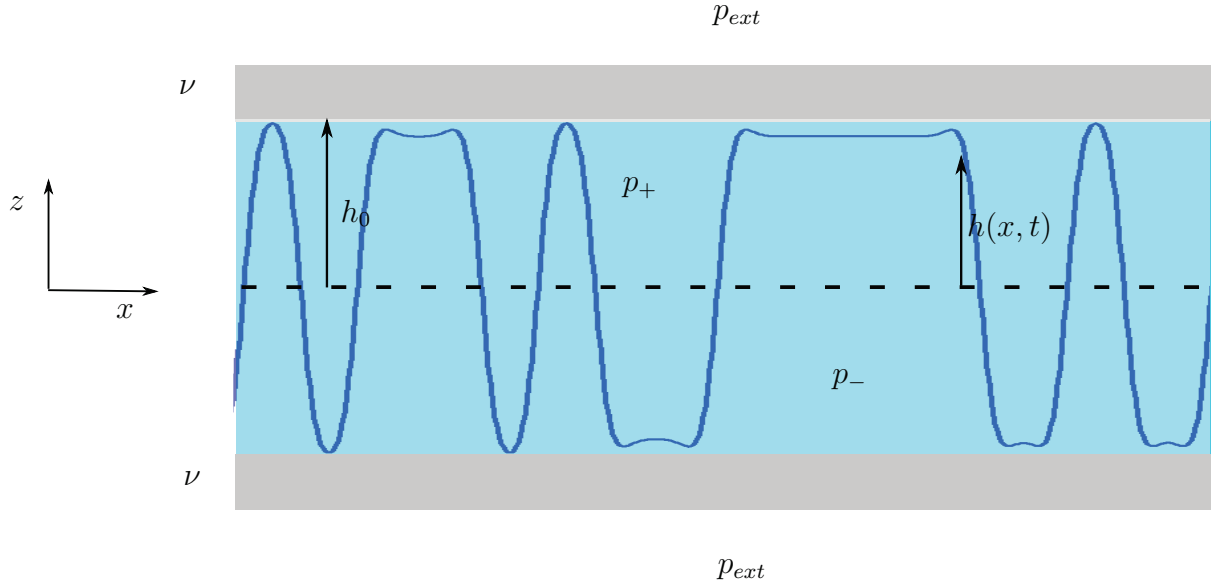


FIGURE 2.1 – Système étudié avec la membrane en bleu foncé baignant dans le fluide en bleu clair. h désigne la hauteur de la membrane. p_{\pm} représente la pression au sein du fluide au-dessus (+) ou en dessous (-) de la membrane et la pression extérieure p_{ext} est fixée. Enfin, ν est la perméabilité des murs.

longues [88]. En revanche, la perméabilité des murs ν , définie dans la sous-section 2.1.3, est considérée, notre mur pouvant représenter différents substrats biologiques. Ce substrat peut par exemple être du cartilage dans le cas des systèmes de biolubrification [64], ou du collagène une protéine structurale qui se retrouve dans les os ou les tissus du corps [74] ou encore le cytosquelette. Cette perméabilité aura un effet important sur la dynamique comme nous le verrons par la suite.

Nous allons tout d’abord décrire le modèle physique en détail. Puis, nous obtiendrons une équation pour le profil $h(x, t)$ de la membrane en intégrant analytiquement l’hydrodynamique dans l’approximation de lubrification.

2.1.2 Equation du fluide

Nous pouvons tout d’abord écrire l’équation de Navier-Stokes décrivant l’hydrodynamique du fluide et la condition d’incompressibilité

$$\rho(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.2)$$

avec $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z$ la vitesse du fluide. Les \mathbf{e}_i sont les vecteurs unitaires du système de coordonnées cartésiennes.

Les fluides biologiques sont souvent des fluides complexes comprenant des macromolécules comme des polymères ou des protéines. Cette complexité ne sera pas prise en compte dans le modèle et le fluide sera pris newtonien.

2.1. SYSTÈME ÉTUDIÉ

2.1.3 Conditions aux limites

Pour obtenir l'expression de la vitesse du fluide, il faut définir quelques conditions aux limites. Premièrement, nous considérons qu'il n'y a pas de glissement entre le fluide et les murs. La longueur de glissement est négligeable ($< \text{nm}$ et $h_0 \approx 10 \text{nm}$) pour un fluide avec un angle de contact de moins de 120° d'après les travaux de D.M. Huang et al [42]. Cette condition est effectivement vérifiée pour le cas du fluide synovial sur du cartilage [97], ce qui se trouve dans les articulations du corps. La longueur n'est plus négligeable pour les angles de contact plus élevés. Cependant, les substrats biologiques sont très rugueux et la rugosité est très efficace pour annihiler le glissement. Il s'en suit donc

$$v_x|_{z=\pm h_0} = 0. \quad (2.3)$$

Ensuite, la partie des lipides en contact avec le fluide étant hydrophile, il apparaît naturel de négliger le glissement entre la membrane et le fluide. De plus, les simulations de dynamique moléculaire réalisées par T.J. Müller et F. Müller-Plathe suggèrent que le glissement entre les deux couches de lipides est négligeable [67], sauf dans des cas de déshydratation extrême [9]. En cisillant notre système avec un taux de cisaillement de 10^{-2} ps^{-1} (cela correspond à une vitesse du fluide de 100 m.s^{-1} à $h_0 = 10 \text{ nm}$ de la membrane), les simulations de T.J. Müller et F. Müller-Plathe donnent une vitesse de 1 m.s^{-1} entre les deux couches de lipides si le fluide est de l'eau. Cette vitesse est bien négligeable. De plus, la viscosité de la membrane est nettement supérieure à celle de l'eau [67, 101], les déplacements de lipides au sein d'une même couche peuvent être négligés et donc le glissement aussi. Nous pouvons donc écrire l'égalité des vitesses pour le fluide au-dessus et en dessous au niveau de la membrane

$$\mathbf{v}_+|_{z=h} = \mathbf{v}_-|_{z=h}. \quad (2.4)$$

Puis, les murs étant perméables, nous définissons une loi de perméabilité inspirée par la loi de Darcy. Cette loi impose que la vitesse normale du fluide au bord des murs soit proportionnelle à la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur du système

$$v_{z\pm}|_{z=\pm h_0} = \pm \nu (p_{\pm} - p_{ext}), \quad (2.5)$$

où ν est la perméabilité des murs. Il s'agit d'une loi de réponse linéaire à la Onsager où ν joue le rôle du coefficient cinétique.

Enfin, la continuité du tenseur des contraintes implique que

$$[(\bar{\bar{\tau}}_+ - \bar{\bar{\tau}}_-)|_{z=h} \mathbf{n}] \cdot \mathbf{t} = -f_t, \quad (2.6)$$

$$[(\bar{\bar{\tau}}_+ - \bar{\bar{\tau}}_-)|_{z=h} \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n} = -f_n, \quad (2.7)$$

où $\bar{\bar{\tau}}_{ij} = \mu(\partial_i v_j + \partial_j v_i) - p \delta_{ij}$ est le tenseur des contraintes dans le fluide. δ_{ij} est le symbole de Kronecker et f_t et f_n sont les forces par unité de longueur tangentielle et normales à la membrane, elles peuvent être d'origine interne ou externe.

2.1.4 Forces subies par la membrane

Nous allons maintenant décrire les différentes forces qui agissent sur la membrane.

Force de courbure

Pour commencer, nous avons vu dans la sous-section 1.4.3 que la membrane avait une énergie de courbure qui a pour effet de l'aplanir. Pour une membrane unidimensionnelle, il n'y a plus qu'une coordonnée interne s , il est possible de choisir de prendre l'abscisse curviligne le long de la membrane, l'élément d'aire $d\mathcal{A}$ devient alors un élément de longueur ds (se référer à l'appendice A.1 pour la définition des outils géométriques). Le tenseur de la métrique lui (voir équation (A.4)), est simplement un nombre qui vaut $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$ où $\mathbf{t} = \partial_s \mathbf{r}$, est le vecteur unitaire tangentiel à la membrane (ce vecteur est unitaire seulement si s est l'abscisse curviligne). Le vecteur normal \mathbf{n} est défini par la formule de Frenet

$$\partial_s \mathbf{t} = c \mathbf{n}, \quad (2.8)$$

où c est la courbure de la membrane.

De même, le tenseur de courbure (voir équation (A.7)) n'est plus qu'un scalaire qui sera égal à la courbure de la membrane

$$c = (\partial_s^2 \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = (\partial_s \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n}. \quad (2.9)$$

L'énergie de courbure pour une membrane 1D est égale à

$$\mathcal{E}_\kappa = \int ds \frac{\kappa}{2} c^2. \quad (2.10)$$

Nous rappelons que nous utilisons ici la même notation κ pour la rigidité de courbure que pour une membrane bidimensionnelle même si cette grandeur n'a pas la même dimension. Nous faisons de même pour toutes les grandeurs.

Une force sera induite par cette énergie de courbure. Pour obtenir son expression, il est nécessaire de calculer la variation d'énergie $\delta \mathcal{E}_\kappa$ qui entre en jeu lorsque la membrane se déplace de $\{\mathbf{r}\}$ à $\{\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}\}$, et le résultat est

$$\delta \mathcal{E}_\kappa = \frac{\kappa}{2} \int ds \delta \mathbf{r} \cdot [-(c^3 + 2\partial_{ss}c)] \mathbf{n}. \quad (2.11)$$

Le calcul est détaillé dans l'annexe A.2. Cela signifie que la force de courbure vaut

$$\mathbf{f}_\kappa = -\kappa \left(\frac{c^3}{2} + \partial_{ss}c \right) \mathbf{n}, \quad (2.12)$$

la force par unité de longueur obtenue est normale à la membrane. Le terme en c^3 sera négligeable par la suite dans le cadre de l'approximation de lubrification (voir sous-section 2.2.1). Le terme en $\partial_{ss}c$ va faire apparaître la dérivée quatrième de la hauteur h de la membrane, ce terme est stabilisant et aura pour effet de s'opposer à la courbure de la membrane.

Potentiel d'interaction avec les murs

2.2. DÉRIVATION DE L'ÉQUATION D'ÉVOLUTION

En plus de la rigidité de la membrane, le potentiel d'adhésion créé par les murs va être considéré. Le potentiel choisi synthétise toutes les contributions présentées dans la sous-section 1.4.4, le potentiel subi par la membrane est un potentiel double puits. La membrane a deux états d'adhésion possibles, ce sont les deux minimums du potentiels. Pour l'étude nous allons choisir le potentiel par unité de longueur qui représente ces effets le plus simplement possible et choisir un potentiel double puits symétrique de la forme

$$\mathcal{U}(h) = \frac{\mathcal{U}_0}{h_0^4} \left(\frac{h^4}{4} - h_m^2 \frac{h^2}{2} \right) \quad (2.13)$$

où \mathcal{U}_0 quantifie l'amplitude du potentiel et h_m indique la hauteur des deux minimums. Ce potentiel ne dépend que de la hauteur de la membrane car les murs sont invariants par translation selon x . La contribution à l'énergie est

$$\mathcal{E}_p = \int ds \mathcal{U}(h). \quad (2.14)$$

Le potentiel est représenté sur la figure 2.2. Les deux groupes de quatre points expliquent l'effet sur la membrane. Si nous nous plaçons dans une zone où la courbure du potentiel est positive, i.e. dérivée seconde positive, alors le fait de créer des oscillations sur la membrane va augmenter l'énergie. Ceci est schématisé par les quatre points de gauche sur la figure 2.2. Si la membrane s'écarte de l'état plan (représenté par les deux points extérieurs) alors l'énergie moyenne (représentée par le point du milieu) sera au-dessus de l'énergie qu'aurait la membrane plane de même hauteur moyenne. La variation d'énergie $\Delta\mathcal{U}$ est positive. Donc dans ces zones, la membrane va chercher à s'aplanir. En revanche, pour les zones où la courbure du potentiel est négative, alors la membrane diminuera son énergie en créant des instabilités. La variation d'énergie $\Delta\mathcal{U}$ est négative. L'effet global de ce potentiel sera de créer des domaines d'adhésion dans un ou l'autre minimum du potentiel, il va y avoir compétition entre les deux états d'adhésion possibles. Ce comportement rappelle la décomposition spinodale comme discuté dans l'introduction.

Pour résumer, les forces par unité de longueur tangentielles et normales à la membrane s'expriment

$$f_t = -\mathcal{U}'(h)\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{t}, \quad (2.15)$$

$$f_n = -\kappa \left(\frac{c^3}{2} + \partial_{ss}c \right) - \mathcal{U}'(h)\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n} + c\mathcal{U}(h). \quad (2.16)$$

2.2 Dérivation de l'équation d'évolution

Dans cette section nous allons dériver l'équation d'évolution d'une seule membrane lipidique entre deux murs plans qui est la situation qui a principalement été étudiée dans le cadre de cette thèse. Nous rappelons que l'indice + spécifie que ce sont des variables au-dessus de la membrane ($z > h$) et que l'indice - est pour les variables sous la membrane ($z < h$).

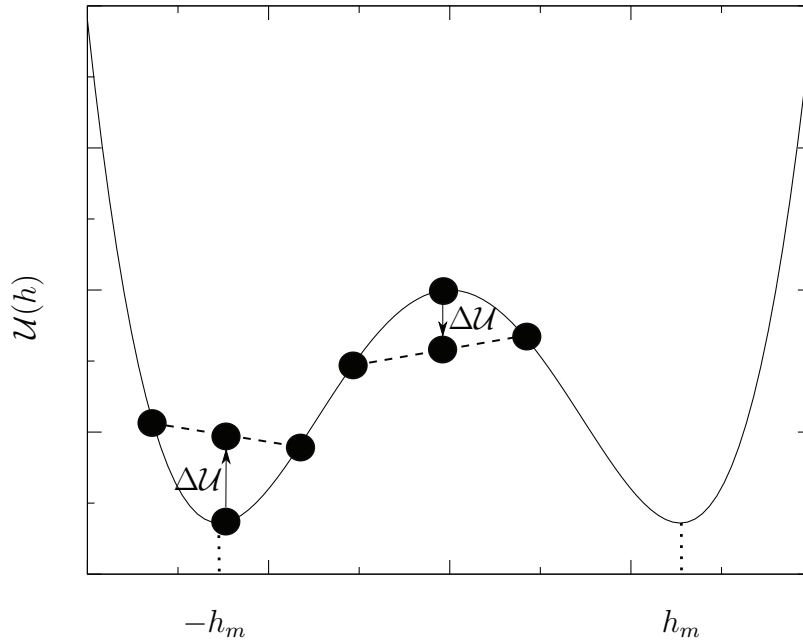


FIGURE 2.2 – Potentiel en fonction de la hauteur h de la membrane. Les minimums sont repérés par $\pm h_m$. $\Delta\mathcal{U}$ est la différence d'énergie entre une membrane avec des oscillations et une membrane plane.

2.2.1 Approximation de lubrification

Afin de faciliter l'analyse du système, nous nous plaçons dans le cadre de l'approximation de lubrification. Ceci permet d'obtenir une équation d'évolution sur la hauteur $h(x, t)$ seulement au lieu d'une équation sur $h(x, t)$ et sur la vitesse du fluide $v(x, z, t)$. Cette limite signifie que

$$\partial_x h \ll 1, \quad (2.17)$$

nous sommes dans la limite des petites pentes. En revanche, les variations de h peuvent être de l'ordre de la taille du système, i.e. la distance entre les murs. Il est alors possible de définir un petit paramètre

$$\epsilon = \frac{h_0}{\ell} \quad (2.18)$$

où ℓ est la taille typique des domaines d'adhésion. Comme mentionné dans la sous-section 1.4.4, le potentiel créé par un mur comprenant les forces de Van der Waals et la force d'hydratation est un potentiel à un puits avec un minimum à environ 2 nm du mur. Dans le cas où $h_0 = 10$ nm, nous obtenons bien un potentiel double puits. La validité de l'approximation de lubrification sera vérifiée au fur et à mesure de l'étude. Dans cette limite le vecteur normal \mathbf{n} sera confondu avec le vecteur unitaire \mathbf{e}_z et le vecteur tangentiel \mathbf{t} avec \mathbf{e}_x . Toutes les forces qui s'appliquent à la membrane sont donc selon l'axe vertical z .

Nous allons considérer de plus que nous travaillons avec des nombres de Reynolds au plus de l'ordre de 1

$$\text{Re} = \frac{\rho u_0 h_0}{\mu} = \mathcal{O}(1), \quad (2.19)$$

2.2. DÉRIVATION DE L'ÉQUATION D'ÉVOLUTION

où u_0 est la vitesse typique du fluide. L'écoulement sera alors laminaire et principalement dans la direction \mathbf{e}_x dans l'approximation de lubrification.

Nous pouvons définir des variables sans dimension de l'ordre de 1 pour pouvoir négliger certains termes par rapport à d'autres en s'inspirant par exemple de l'article de A. Oron, S.H. Davis et S.G. Bankoff [75]. Les variables adimensionnées gardent les même notations mais seront notées en majuscule. Les coordonnées cartésiennes deviennent

$$Z = z/h_0 \quad (2.20)$$

et

$$X = x/\ell = \epsilon x/h_0, \quad (2.21)$$

les murs sont alors situés en $Z = \pm 1$. Le temps devient

$$T = t/t_0 \quad (2.22)$$

où t_0 est un temps caractéristique que nous choisissons égal à $\ell/u_0 = h_0/(\epsilon u_0)$, soit le temps typique que met le fluide pour se déplacer de la longueur ℓ . Les composantes de la vitesse du fluide deviennent alors $V_X = v_x/u_0$ et $V_Z = v_z/(\epsilon u_0)$, l'écoulement étant laminaire dans la direction x la vitesse typique du fluide selon z est naturellement d'ordre 1. Enfin, la pression adimensionnée est $P = \epsilon h_0 p/(\mu u_0)$. L'équation (2.1) projetée sur les axes x et z peut maintenant être réécrite de la manière suivante

$$/X \quad \epsilon \text{Re}(\partial_T V_X + V_X \partial_X V_X + V_Z \partial_Z V_X) = -\partial_X P + \epsilon^2 \partial_X^2 V_X + \partial_Z^2 V_X, \quad (2.23a)$$

$$/Z \quad \epsilon^3 \text{Re}(\partial_T V_Z + V_X \partial_X V_Z + V_Z \partial_Z V_Z) = -\partial_Z P + \epsilon^2 (\epsilon^2 \partial_X^2 V_Z + \partial_Z^2 V_Z). \quad (2.23b)$$

Dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$, le liquide obéit à l'équation de Stokes et la vitesse du fluide est essentiellement dirigée selon x . Les équations sont simplement

$$/X \quad \partial_Z^2 V_X = \partial_X P, \quad (2.24a)$$

$$/Z \quad \partial_Z P = 0, \quad (2.24b)$$

ce qui signifie que d'une part, la pression ne dépend pas de Z et d'autre part, que v_x est une fonction quadratique de z :

$$v_x = \frac{z^2}{2\mu} \partial_x p + az + b, \quad (2.25)$$

avec a et b des constantes.

Dans la limite de lubrification, toutes les dérivées par rapport à x sont d'ordre ϵ , et l'abscisse curviligne s vaut x à l'ordre dominant, ce qui implique pour la courbure que $c \simeq \partial_{xx} h = \mathcal{O}(\epsilon^2)$. La force de courbure par unité de longueur vaut alors à l'ordre dominant

$$\mathbf{f}_\kappa = -\kappa(\partial_x^4 h)\mathbf{e}_z. \quad (2.26)$$

Si h est une fonction sinusoïdale de longueur d'onde λ autour de $h = 0$, alors $\partial_x^4 h \propto h/\lambda^4$ et donc la force de courbure est du signe opposé de h . Nous retrouvons bien que cette force est stabilisante et qu'elle va tendre à diminuer la hauteur si elle est positive et à

l'augmenter si elle est négative, cela tend donc à aplanir la membrane. Par ailleurs, cette force sera en $1/\lambda^4$, l'effet stabilisant sera d'autant plus important aux petites échelles.

En reprenant l'expression de la force normale à la membrane (2.16), il est possible d'évaluer ϵ en fonction des différents paramètres

$$\begin{aligned} f_n &= -\kappa \partial_x^4 h - \mathcal{U}'(h) + \partial_{xx} h \mathcal{U}(h) \\ &= -\frac{\kappa \epsilon^4}{h_0^3} \partial_X^4 H - \frac{\mathcal{U}_0}{h_0} U'(H) + \frac{\epsilon^2 \mathcal{U}_0}{h_0} \partial_{XX} H U(H). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Le troisième terme à droite est négligeable dans le limite de lubrification $\epsilon \rightarrow 0$. Pour que les deux derniers termes soient du même ordre de grandeur il est nécessaire que

$$\epsilon = \left(\frac{h_0^2 \mathcal{U}_0}{\kappa} \right)^{1/4}. \quad (2.28)$$

Si le potentiel est celui du papier de P.S. Swain et D. Andelman [94] dans lequel ils considèrent l'attraction de Van der Waals et la force d'hydratation et que $h_0 = 10$ nm, alors le paramètre ϵ vaut environ 0, 1.

2.2.2 Une membrane entre deux murs plans

Nous avons désormais tous les ingrédients nécessaires pour dériver l'équation d'évolution.

Le point de départ de la dérivation est la conservation de la quantité de fluide. L'expression de l'incompressibilité du fluide $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ implique directement que

$$0 = \int_{-h_0}^h dz (\partial_x v_{x-} + \partial_z v_{z-}) = \int_{-h_0}^h dz \partial_x v_{x-} + v_{z-}|_{z=h} - v_{z-}|_{z=-h_0}. \quad (2.29)$$

En reprenant la loi de perméabilité (2.5) en $z = -h_0$ cela donne

$$0 = \int_{-h_0}^h dz \partial_x v_{x-} + \partial_t h + v_{x-}|_{z=h} \partial_x h + \nu(p_- - p_{ext}). \quad (2.30)$$

Le premier et le troisième terme à droite peuvent être rassemblés et donnent la dérivée par rapport à x de

$$j_- = \int_{-h_0}^h dz v_{x-} \quad (2.31)$$

qui correspond en fait au débit de fluide sous la membrane dans la direction x . Il s'en suit donc

$$\partial_t h = -\partial_x j_- - \nu(p_- - p_{ext}). \quad (2.32)$$

Nous pouvons écrire exactement la même chose pour z allant de h à h_0 et en appelant de la même manière le débit de fluide au-dessus de la membrane j_+ . Cette fois la relation obtenue est

$$\partial_t h = \partial_x j_+ + \nu(p_+ - p_{ext}). \quad (2.33)$$

2.2. DÉRIVATION DE L'ÉQUATION D'ÉVOLUTION

En sommant ces deux dernières équations et en remplaçant v_x par son expression dans l'approximation de lubrification (voir équation (2.25)) nous obtenons

$$\partial_t h = \frac{h_0^3}{2\mu} \partial_x \left[\frac{1}{6} \partial_x (\Delta p) - \frac{h^3}{6h_0^3} \partial_x (\Sigma p) + \frac{\mu}{2h_0} \left(1 - \frac{h^2}{h_0^2} \right) \Sigma a + \frac{\mu}{h_0^2} \left(\Delta b - \frac{h}{h_0} \Sigma b \right) \right] + \frac{\nu}{2} \Delta p, \quad (2.34)$$

où pour toute quantité y nous définissons $\Delta y = y_+ - y_-$ et $\Sigma y = y_+ + y_-$. Nous utilisons cette nouvelle notation par souci de commodité.

Pour obtenir l'équation d'évolution il est nécessaire de connaître $\partial_x p$, a et b en tout point du fluide au dessus et en dessous de la membrane, cela fait donc un total de 6 inconnues. Nous devons trouver 6 équations pour pouvoir résoudre le problème, ce sont les conditions aux limites et l'expression du débit total du fluide qui vont fournir les équations nécessaires. Si nous récapitulons les conditions aux limites de la sous-section 2.1.3, nous avons le non-glissement du fluide sur les murs et au niveau de la membrane. Si nous rajoutons l'équilibre mécanique cela fait 5 équations

$$\begin{cases} v_{x+}|_{z=h_0} = 0, & (2.35) \\ v_{x-}|_{z=-h_0} = 0, & (2.36) \\ v_{x+}|_{z=h} = v_{x-}|_{z=h}, & (2.37) \\ p_+ - p_- = f_n, & (2.38) \\ \partial_z v_{x+}|_{z=h} - \partial_z v_{x-}|_{z=h} = 0. & (2.39) \end{cases}$$

A cela nous rajoutons l'expression du débit total dans la direction x qui forme la sixième équation du système

$$j = j_+ + j_- = \int_{-h_0}^{h_0} dz v_x, \quad (2.40)$$

le débit vérifiant l'équation différentielle (voir appendice B.1)

$$\partial_{xx} j - \frac{3\mu\nu}{h_0^3} j = \frac{\nu}{2} \left(\frac{h^3}{h_0^3} - 3 \frac{h}{h_0} \right) \partial_x f_n. \quad (2.41)$$

Après un peu de calcul détaillé dans l'appendice B.1, la résolution du système d'équation donne

$$\partial_t h = \partial_x \left[-\frac{h_0^3}{24\mu} \left(1 - \frac{h^2}{h_0^2} \right)^3 \partial_x (f_n) + \frac{3}{4} j \frac{h}{h_0} \left(\frac{h^2}{3h_0^2} - 1 \right) \right] + \frac{\nu}{2} f_n. \quad (2.42)$$

avec

$$f_n = -\kappa \partial_x^4 h - \mathcal{U}'(h). \quad (2.43)$$

Dans le premier terme de l'équation (2.42) à droite, il apparaît une mobilité $(1 - h^2/h_0^2)^3$ qui modélise le ralentissement de la dynamique par divergence de la dissipation visqueuse lorsque la membrane s'approche du mur. Ce comportement est bien connu, l'étude d'une particule sphérique dans un fluide qui se rapproche d'un mur plan laisse supposer qu'il faut une force infinie pour qu'il y ait contact [10].

Le deuxième terme, qui fait apparaître le débit du fluide j est non local puisque celui-ci vérifie une équation différentielle et son expression dépendra donc des conditions aux

CHAPITRE 2. PRÉSENTATION DU MODÈLE BIDIMENSIONNEL

bords. Ce terme n'apparaît pas pour des murs entièrement perméables. Dans le cas des murs imperméables, le fluide étant incompressible, la quantité de fluide de part et d'autre de la membrane est conservée. Un déplacement de fluide à un endroit induit un mouvement global.

Enfin, le dernier terme représente l'effet de la perméabilité ν des murs, plus les murs seront perméables et plus la membrane se déplacera facilement selon les forces normales f_n .

Chapitre 3

Adhésion d'une membrane 1D confinée entre deux murs plans

Nous venons de présenter le système étudié et de montrer comment obtenir l'équation d'évolution. Dans ce chapitre nous allons étudier la dynamique d'adhésion de la membrane régie par l'équation (2.42).

Premièrement, l'énergie de la membrane ne peut que diminuer au cours du temps. Cette énergie dans l'approximation de lubrification s'écrit

$$\mathcal{E}_{mem} = \int dx \left(\frac{\kappa}{2} (\partial_{xx} h)^2 + \mathcal{U}(h) \right). \quad (3.1)$$

La dérivée temporelle de l'énergie de la membrane vaut ¹

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{E}_{mem} &= \int dx \left[-\frac{h_0^3}{24\mu} \left(1 - \frac{h^2}{h_0^2} \right)^3 (\partial_x f_n)^2 - \frac{1}{\nu} (\partial_x j)^2 - \frac{3\mu}{2h_0^3} j^2 - \frac{\nu}{2} f_n^2 \right] \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Nous retrouvons bien que l'énergie ne peut que diminuer au cours du temps, ce qui est naturel puisqu'aucune énergie n'est injectée dans le système. Ce résultat permettra de tirer quelques conclusions sur la stabilité des états stationnaires.

1.

$$\partial_t \mathcal{E}_{mem} = \partial_t \left[\int dx \left(\frac{\kappa}{2} (\partial_{xx} h)^2 + \mathcal{U}(h) \right) \right] = \int dx \left(\kappa \partial_{xx} h \partial_t \partial_{xx} h + \mathcal{U}'(h) \partial_t h \right),$$

nous rappelons que dans le cadre de l'approximation de lubrification $x \simeq s$ et que nous considérons des conditions aux limites périodiques (ou une membrane infinie). Nous pouvons donc écrire en utilisant les équations (2.41) et (2.42) et les conditions aux limites périodiques que

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{E}_{mem} &= \int dx \left(\kappa \partial_x^4 h + \mathcal{U}'(h) \right) \partial_t h \\ &= \int dx \left(-f_n \right) \left\{ \partial_x \left[-\frac{h_0^3}{24\mu} \left(1 - \frac{h^2}{h_0^2} \right)^3 \partial_x (f_n) + \frac{3}{4} j \frac{h}{h_0} \left(\frac{h^2}{3h_0^2} - 1 \right) \right] + \frac{\nu}{2} f_n \right\} \\ &= \int dx \left[-\frac{h_0^3}{24\mu} \left(1 - \frac{h^2}{h_0^2} \right)^3 (\partial_x f_n)^2 \right] + \int dx \left[\frac{1}{\nu} j \partial_{xx} j - \frac{3\mu}{2h_0^3} j^2 \right] + \int dx \left[-\frac{\nu}{2} f_n^2 \right]. \end{aligned}$$

CHAPITRE 3. ADHÉSION D'UNE MEMBRANE 1D CONFINÉE ENTRE DEUX MURS PLANS

Nous allons maintenant étudier la dynamique d'évolution de la membrane et commencer par examiner l'influence de la perméabilité des murs ν sur l'adhésion, et notamment sur la morphologie des domaines d'adhésion.

3.1 Limite des murs très perméables : cas non-conservé

Le premier cas qui est étudié est la limite des murs très perméables, $\nu_n \rightarrow \infty$, avec

$$\nu_n = \frac{12\mu\kappa^{1/2}}{h_0^2\mathcal{U}_0^{1/2}}\nu \quad (3.3)$$

la perméabilité normalisée. Nous l'appelons cas non-conservé car la hauteur moyenne de la membrane peut varier au cours du temps. Les murs étant perméables, les quantités de fluide au-dessus et en dessous de la membrane ne sont pas des constantes et le fluide étant incompressible cela implique directement que le volume varie.

3.1.1 Equation d'évolution

Si nous appliquons $\nu_n \gg 1$ à l'équation (2.42), elle devient dans cette limite²

$$\partial_t h = \frac{\nu}{2} f_n = \frac{\nu}{2} (-\kappa \partial_x^4 h - \mathcal{U}'(h)), \quad (3.4)$$

la dérivée temporelle de h est simplement proportionnelle aux forces normales. Nous définissons $U(H) = \mathcal{U}(h)/\mathcal{U}_0$, le potentiel par unité de longueur normalisé de telle sorte que sa valeur soit de l'ordre de 1. Nous rappelons que nous avons choisi un potentiel de la forme (voir équation (2.13))

$$U(H) = \frac{H^4}{4} - H_m^2 \frac{H^2}{2}. \quad (3.5)$$

Le temps est ensuite normalisé avec le paramètre ν

$$T = \frac{t}{t_0} = \frac{\nu\mathcal{U}_0}{2h_0^2} t. \quad (3.6)$$

De même nous normalisons la variable spatiale de la manière suivante

$$X = \left(\frac{\mathcal{U}_0}{\kappa h_0^2} \right)^{1/4} x, \quad (3.7)$$

ce qui permet de réécrire l'équation (3.4) sous la forme

$$\partial_T H = -\partial_X^4 H - U'(H), \quad (\text{TDGL4}) \quad (3.8)$$

2. Nous pouvons nous inquiéter de la validité de l'approximation de lubrification dans cette limite, car la vitesse du fluide est alors naturellement selon z plutôt que selon x . Cependant, le résultat apparaît ici auto-consistant physiquement malgré l'ambiguïté mathématique dans l'ordre des approximations.

3.1. LIMITE DES MURS TRÈS PERMÉABLES : CAS NON-CONSERVÉ

où $H = h/h_0$ est la hauteur normalisée qui peut donc varier de -1 à 1 .

L'équation (3.8) est très similaire à une équation bien connue de la littérature, l'équation de Ginzburg-Landau dépendant du temps (TDGL) [39]

$$\partial_T H = \partial_X^2 H - U'(H), \quad (\text{TDGL}) \quad (3.9)$$

avec une dérivée seconde au lieu d'une dérivée quatrième dans notre cas. Pour faire le parallèle entre les deux cas nous nommerons l'équation (3.8) TDGL4 pour indiquer la dérivée d'ordre 4. L'équation de Ginzburg-Landau TDGL modélise les systèmes de séparation de phase à paramètre d'ordre non-conservé, dans notre cas la hauteur moyenne de la membrane joue le rôle de ce paramètre d'ordre. En fait une membrane sans rigidité de courbure mais avec une tension de surface vérifierait l'équation TDGL. La comparaison des deux dynamiques permettra alors de mieux comprendre l'effet de la rigidité.

Nous savons notamment que la taille typique des domaines d'adhésion dans le cas de TDGL augmente avec le temps, ce phénomène s'appelle le mûrissement. Il y a fusion des domaines au cours de la dynamique pour finir dans un état uniforme aux temps longs, ce qui correspondrait à une membrane plane dans un des minimums du potentiel dans notre situation. La croissance de la taille des domaines est en $\ln t$ pour une interface (membrane pour notre problème) 1D et en $t^{1/2}$ pour une interface 2D.

3.1.2 Relation de dispersion non discriminante

Nous allons maintenant étudier la stabilité linéaire de notre membrane lipidique, toujours dans la limite des murs très perméables. Nous considérons donc une membrane plane de hauteur moyenne \bar{H} que est perturbée par δH et nous allons chercher quelles longueurs d'onde vont émerger le plus rapidement dans la dynamique. La perturbation choisie est périodique spatialement et l'amplitude va évoluer avec le temps de la manière suivante

$$\delta H = A \exp(\omega T + i q X) \text{ avec } |A| \ll 1, \quad (3.10)$$

où $q = 2\pi/\lambda$ avec λ la longueur d'onde de la perturbation. ω est le taux d'accroissement de la perturbation et indiquera quelles longueurs d'onde vont apparaître préférentiellement dans la dynamique. Les perturbations avec des taux d'accroissement négatifs seront stabilisées et vont disparaître car leur amplitude va diminuer tandis que celles avec un taux d'accroissement positif vont s'accroître.

Nous choisissons $\bar{H} = 0$ pour une raison discutée à la fin de cette sous-section. Si $H = \delta H$ est réinjecté dans l'équation (3.8) cela donne au premier ordre la relation de dispersion suivante

$$\omega = -q^4 - U''(0). \quad (3.11)$$

Dans le cas d'un potentiel double puits la dérivée seconde du potentiel en $H = 0$ est négative, nous avons donc des vecteurs d'onde q avec un taux d'accroissement positif si $q < (-U''(0))^{1/4}$. Cela correspond aux grandes longueurs d'onde, c'est-à-dire les longueurs d'onde vérifiant la condition suivante

$$\lambda > \frac{2\pi}{(-U''(0))^{1/4}}. \quad (3.12)$$

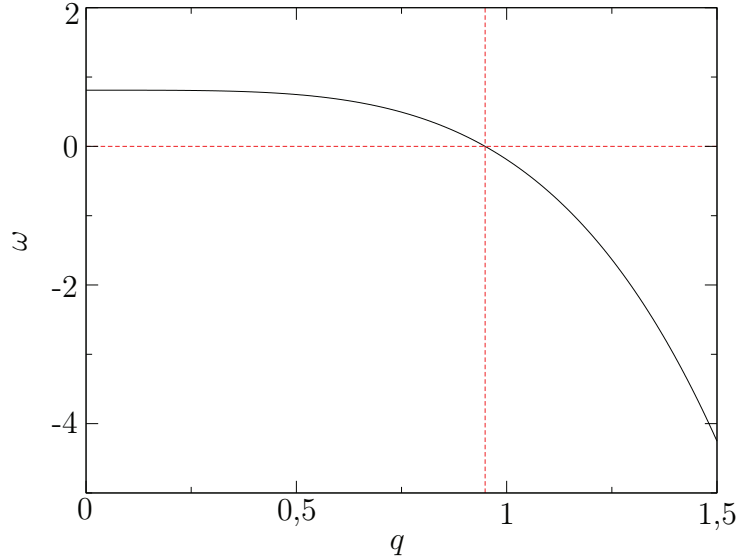


FIGURE 3.1 – Relation de dispersion dans le cas non-conservé avec hauteur moyenne nulle pour $U(H) = H^4/4 - H_m^2 H^2/2$ et $H_m = 0.9$.

Si nous reprenons le potentiel du papier de P.S. Swain et D. Andelman [94], cela correspond à une longueur d'onde instable la plus petite d'environ 200 nm. Cela vaut dix fois la distance $2h_0$ entre les murs, nous sommes bien dans l'approximation de lubrification.

La relation de dispersion pour le potentiel choisi dans la sous-section 2.1.4 avec $H_m = h_m/h_0 = 0.9$ est tracée sur la figure 3.1. Les perturbations de petites longueurs d'onde correspondant aux grands q sont stabilisées ($\omega < 0$) tandis que les grandes longueurs d'onde sont instables ($\omega > 0$). Nous remarquons de plus une sorte de plateau pour les petits q , le taux d'accroissement est quasiment le même pour toutes les grandes longueurs d'onde, il ne devrait donc pas y avoir de forte discrimination entre celles-ci. Nous verrons tout de même plus loin que nous n'observons pas de très grands domaines d'adhésion, leur taille reste finie.

Revenons sur le choix de la hauteur moyenne $\bar{H} = 0$. Si cette hauteur moyenne est non nulle, alors elle est une fonction du temps. L'évolution des perturbations en fonction du temps n'est plus exponentielle. De plus, si cette hauteur moyenne est trop éloignée de 0, c'est-à-dire si la membrane se déplace plus rapidement que n'apparaissent les instabilités, alors la membrane entière va se déplacer en bloc jusqu'au minimum du potentiel le plus proche et finir dans un état uniforme, une membrane plane.

3.1.3 Dynamique gelée et état désordonné

Examinons maintenant la dynamique non-linéaire de notre système. Pour cela, une membrane avec des conditions aux limites périodiques et comme conditions initiales des hauteurs aléatoires entre -0,1 et 0,1 a été simulée. Pour les simulations, nous utilisons la méthode des différences finies avec $\Delta X = 0,2$ et $\Delta T = 10^{-6}$ les pas d'espace et de temps

3.2. LIMITE DES MURS IMPERMÉABLES : CAS CONSERVÉ

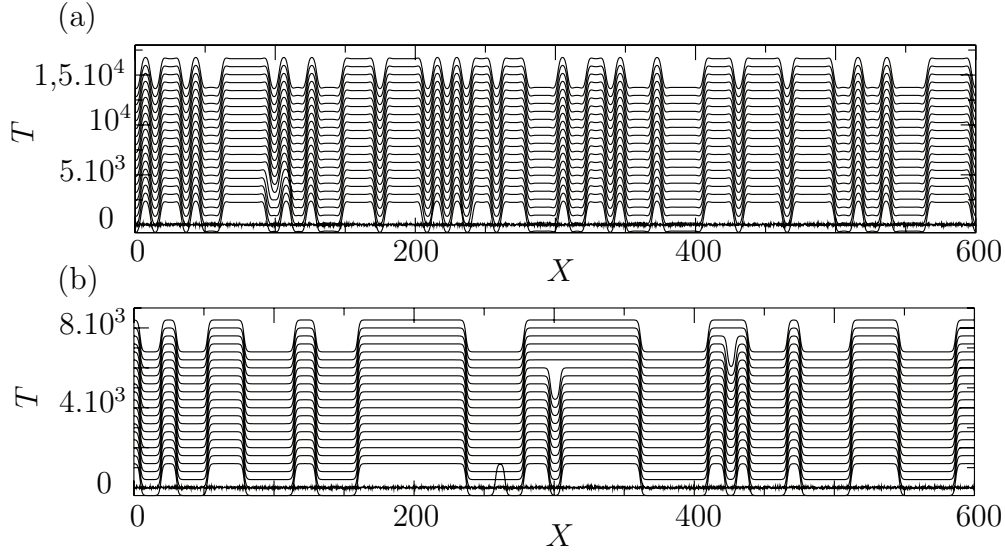


FIGURE 3.2 – (a) Evolution de la membrane en fonction du temps pour TDGL4. Chaque courbe correspond à la hauteur de la membrane à un temps donné, elles sont translatées en fonction du temps. (b) Evolution pour TDGL. Pour ces deux simulations nous avons utilisé la méthode des différences finies avec $\Delta X = 0,2$ et $\Delta T = 10^{-6}$ comme pas d'espace et de temps.

utilisés. Le résultat des simulations est représenté sur la figure 3.2, ce sont différentes images instantanées de la membrane translatées avec le temps. En (a), pour l'équation TDGL4, nous voyons que la dynamique de la membrane est rapidement gelée, en contraste avec l'équation TDGL en (b) où nous voyons très bien la fusion des domaines d'adhésion et donc la croissance de leur taille typique, c'est-à-dire le phénomène de mûrissement. La première observation est que la rigidité de courbure semble bloquer le déplacement de ce que nous appelons kink, c'est-à-dire toute la partie de la membrane qui fait la jonction entre deux domaines d'adhésion voisins. En termes physiques, un kink est une paroi de domaine à 1D. En termes mathématiques, un kink est une solution hétéroclinique qui joint les deux états stationnaires. Ensuite, dans les deux cas il apparaît plusieurs tailles de domaine d'adhésion, ce qui est conforme avec l'étude de stabilité linéaire qui ne prévoyait pas de sélection a priori. Nous verrons tout de même dans la section 3.3 que certaines tailles sont privilégiées par rapport à d'autres.

3.2 Limite des murs imperméables : cas conservé

Nous allons maintenant nous intéresser à la limite opposée, le cas des murs imperméables : $\nu_n \ll 1$. Cette fois la hauteur moyenne de la membrane sera conservée, les quantités de fluide au-dessus et en dessous de la membrane étant conservées, nous l'appelons naturellement le cas conservé.

Equation d'évolution

Dans cette limite l'équation (2.42) devient

$$\partial_t h = \partial_x \left[-\frac{h_0^3}{24\mu} \left(1 - \frac{h^2}{h_0^2} \right)^3 \partial_x(f_n) + \frac{3}{4} j \frac{h}{h_0} \left(\frac{h^2}{3h_0^2} - 1 \right) \right] \quad (3.13)$$

Bien que le débit total j n'ait montré aucune influence notoire sur la dynamique lors des simulations nous l'avons gardé dans les équations. D'après l'équation (2.41) j vérifie

$$\partial_{xx} j = 0, \quad (3.14)$$

et comme les conditions aux limites sont périodiques, j sera une constante qui peut directement être calculée à partir de l'équation (B.14) de l'appendice B.1,

$$j = \frac{h_0^3}{6\mu\mathcal{L}} \int_0^{\mathcal{L}} dx \left(3\frac{h}{h_0} - \frac{h^3}{h_0^3} \right) \partial_x f_n \quad (3.15)$$

où \mathcal{L} est la taille du système. Nous rappelons que $f_n = -\kappa \partial_x^4 h - \mathcal{U}'(h)$. De la même manière que pour le cas non-conservé toutes les variables vont être normalisées. La normalisation spatiale reste la même

$$X = \left(\frac{\mathcal{U}_0}{\kappa h_0^2} \right)^{1/4} x$$

et nous gardons $H = h/h_0$. En revanche, le temps adimensionné est défini de la manière suivante

$$T = \frac{t}{t_0} = \frac{\mathcal{U}_0^{3/2}}{24\mu\kappa^{1/2}} t. \quad (3.16)$$

Bien que ce ne soient pas les mêmes variables que dans le cas non-conservé, nous ne prenons pas la peine de différencier la notation du temps normalisé dans les cas conservé et non-conservé.

L'équation d'évolution du système (3.13) devient alors

$$\partial_T H = \partial_X \left[(1 - H^2)^3 \partial_X (\partial_X^4 H + U'(H)) + JH \left(\frac{H^2}{3} - 1 \right) \right], \text{ (CH4 non-locale)} \quad (3.17)$$

où

$$J = -\frac{9}{L} \int_0^L dX H \left(1 - \frac{H^2}{3} \right) \partial_X^5 H \quad (3.18)$$

avec toujours $U(H) = \mathcal{U}(h)/\mathcal{U}_0$. J est définie de telle sorte que son facteur dans l'équation d'évolution soit 1 et vaut $J = (18\mu\kappa^{1/4}h_0^{-3/2}\mathcal{U}_0^{-5/4})j$.

L'équation d'évolution est appelée CH4 non-locale pour la similitude avec l'équation de Cahn-Hilliard [13]

$$\partial_T H = \partial_{XX} (-\partial_X^2 H + U'(H)) \text{ (CH)}, \quad (3.19)$$

où le terme stabilisant de tension $\partial_{XX} H$ remplace le terme de rigidité de courbure $\partial_X^4 H$ dans l'équation (3.17) et avec en plus un terme de mobilité $(1 - H^2)^3$ qui ralentit la

3.2. LIMITE DES MURS IMPERMÉABLES : CAS CONSERVÉ

dynamique aux abords des murs à cause de la dissipation visqueuse. Le qualificatif "non-local" est utilisé pour l'équation (3.17) car elle fait intervenir le débit J , qui s'exprime comme une intégrale sur tout le système. L'effet de ce terme dépend de l'état du système en entier, cela provient de l'imperméabilité des murs et de l'incompressibilité du fluide qui impliquent la conservation du volume total de fluide, tout mouvement de fluide à un endroit du système implique un écoulement autre part.

L'équation de Cahn-Hilliard CH modélise comme TDGL les systèmes de séparation de phase mais pour un paramètre d'ordre moyen conservé [13]. Nous pouvons citer par exemple la démixtion d'un liquide binaire composé de molécules A et B où le paramètre d'ordre vaut 1 si liquide est uniquement composé de molécules A et -1 si le liquide est uniquement composé de molécules B. Dans notre cas, la hauteur de la membrane \bar{H} joue le rôle du paramètre d'ordre. L'équation CH correspond en fait à une membrane sans rigidité mais avec une tension de surface (au terme non-local près), exactement comme pour TDGL dans le cas des murs très perméables. De même que pour Ginzburg-Landau, la dynamique de CH laisse apparaître du mûrissement, il y a aussi croissance de la taille typique des domaines d'adhésion. Cette croissance est en $\ln t$ pour une interface (membrane dans notre cas) 1D et en $t^{1/3}$ pour une interface 2D.

3.2.1 Relation de dispersion sélective

De même que pour le cas non-conservé, nous allons étudier la stabilité linéaire avant de s'intéresser à la dynamique. Pour cette étude la partie non-locale est omise pour ne garder que l'équation

$$\partial_T H = \partial_X \left[(1 - H^2)^3 \partial_X (\partial_X^4 H + U'(H)) \right], \quad (\text{CH4}) \quad (3.20)$$

qui est nommée CH4 en référence à l'ordre de la dérivé du terme stabilisant. Cette fois, la hauteur moyenne se conservant contrairement au cas des murs très perméables, l'étude peut être faite pour n'importe quelle valeur de \bar{H} . Nous reprenons une perturbation par rapport à la membrane plane de la même forme que dans la sous-section 3.1.2

$$\delta H = A \exp(\omega T + i q X), \quad |A| \ll 1,$$

qui donne au premier ordre

$$\omega = (1 - \bar{H}^2)^3 q^2 (-U''(\bar{H}) - q^4). \quad (3.21)$$

Dans tous les cas $\omega(q = 0) = 0$, ce qui veut dire que les perturbations à grande longueur d'onde ont une mobilité réduite. En effet, l'imperméabilité des murs et l'incompressibilité du fluide rendent prohibitif la dissipation visqueuse lors des déplacements de la membrane dans la limite des grandes échelles. Si $U''(\bar{H}) < 0$, le système est instable et le taux d'accroissement s'annule une deuxième fois pour un vecteur d'onde $q > 0$. Dans le cas contraire, tous les taux d'accroissement sont négatifs et donc les perturbations de toutes les longueurs d'onde sont stabilisées. Ceci est représenté sur la figure 3.3 en (a) où nous voyons les zones où peuvent exister ou non les instabilités.

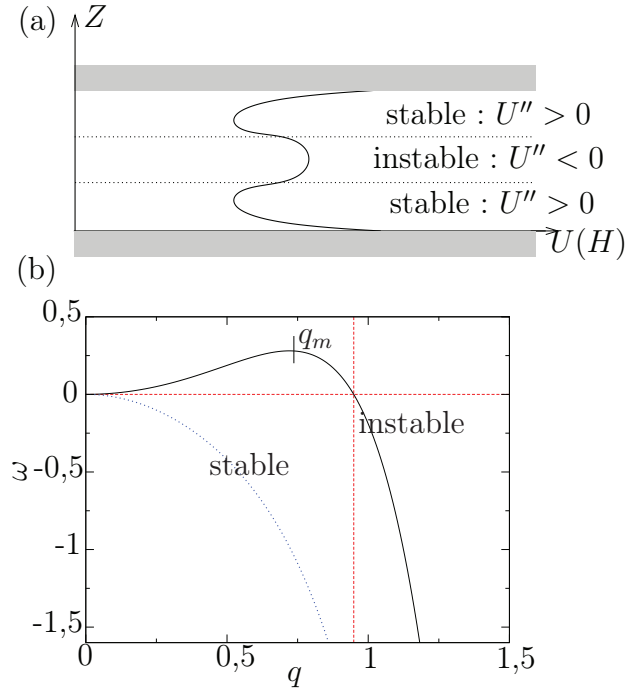


FIGURE 3.3 – (a) Zones de stabilité du système pour une membrane plane. (b) Relation de dispersion dans le cas conservé pour $U(H) = H^4/4 - H_m^2 H^2/2$ et $H_m = 0,9$. La courbe en ligne pleine correspond à $\bar{H} = 0$, nous sommes donc dans une zone instable, et la courbe en pointillée correspond à un \bar{H} de la zone stable ($U''(\bar{H}) > 0$).

Si $U''(\bar{H}) < 0$ alors il y a existence d'instabilités et la relation de dispersion a un maximum à

$$q_m = \left(\frac{-U''(\bar{H})}{3} \right)^{1/4}, \quad (3.22)$$

il est donc naturel de s'attendre à l'apparition d'une taille privilégiée pour les domaines d'adhésion qui correspond à la moitié de $\lambda_m = 2\pi/q_m$, nous choisissons cette grandeur pour $l = [\mathcal{U}_0/(\kappa h_0^2)]^{1/4} \ell$. En reprenant le potentiel du papier de P.S. Swain et D. Andelman [94] avec $h_0 = 10$ nm nous trouvons que ℓ est de l'ordre de 300 nm, nous sommes donc bien dans l'approximation de lubrification. Les petites longueurs d'onde sont stabilisées comme pour le cas non-conservé. Sur la figure 3.3 en (b) nous avons tracé la relation de dispersion dans le cas instable ($U''(\bar{H}) < 0$) et stable ($U''(\bar{H}) > 0$).

3.2.2 Dynamique gelée et état ordonné

Pour les simulations la procédure est la même que dans le cas des murs très perméables. Les résultats qui sont présentés sont ceux de la simulation de l'équation CH4 non-locale, le terme avec le débit J a été gardé. Sur la figure 3.4 la dynamique de la membrane est représentée : en (a) ce sont plusieurs photos instantanées de la membrane qui sont translatés en fonction du temps. La dynamique observée est gelée comme pour le cas non-conservé sauf que, comme le laissait penser l'étude de stabilité linéaire, il n'y a qu'une seule taille

3.3. ETUDE DES ÉTATS STATIONNAIRES ET CRITÈRE DE STABILITÉ POUR LES ÉTATS STATIONNAIRES PÉRIODIQUES

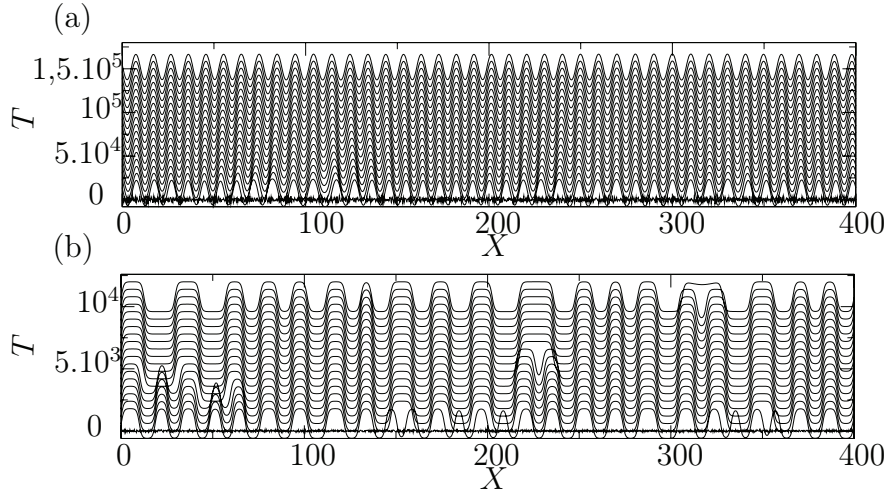


FIGURE 3.4 – (a) Evolution de la membrane en fonction du temps pour CH4 non-locale. Chaque courbe correspond à la hauteur de la membrane à un temps donné, nous les translatons en fonction du temps. (b) Evolution pour CH. Pour ces deux simulations nous avons utilisé la méthode des différences finies avec $\Delta X = 0,2$ et $\Delta T = 10^{-6}$ comme pas d'espace et de temps.

de domaine d'adhésion, et un ordre à longue distance apparaît. En (b) nous montrons une simulation de l'équation de Cahn-Hilliard CH, qui correspond à une membrane sans rigidité de courbure mais avec une tension de surface. Nous voyons de nouveau le phénomène de mûrissement, il y a fusion de domaines d'adhésion et ce jusqu'à qu'il ne reste plus que deux domaines car la hauteur moyenne doit être conservée. Cela confirme un peu plus l'influence de la rigidité de courbure qui stoppe le déplacement des kinks (les frontières entre les domaines d'adhésion).

3.3 Etude des états stationnaires et critère de stabilité pour les états stationnaires périodiques

Nous venons de présenter la dynamique d'adhésion de la membrane et nous observons des états gelés pour les deux limites de grande et de faible perméabilité. Afin de mieux comprendre l'origine de ces états gelés, nous avons étudié les états stationnaires périodiques, qui sont les mêmes dans le cas des murs perméables et imperméables (nous considérons CH4 ici). En effet, nous avons vérifié numériquement qu'en prenant l'état final des simulations du cas conservé comme condition initiale pour le cas non-conservé, aucune évolution n'est observée (et vice versa), comme nous le voyons sur la figure 3.5.

3.3.1 Oscillation des solutions stationnaires

Puisque la dynamique est variationnelle, $\partial_t \mathcal{E} \leq 0$ (voir début de ce chapitre), les états stationnaires vérifient $\partial_t \mathcal{E} = 0$, qui, d'après l'équation (3.2) implique que $f_n = 0$. Les états

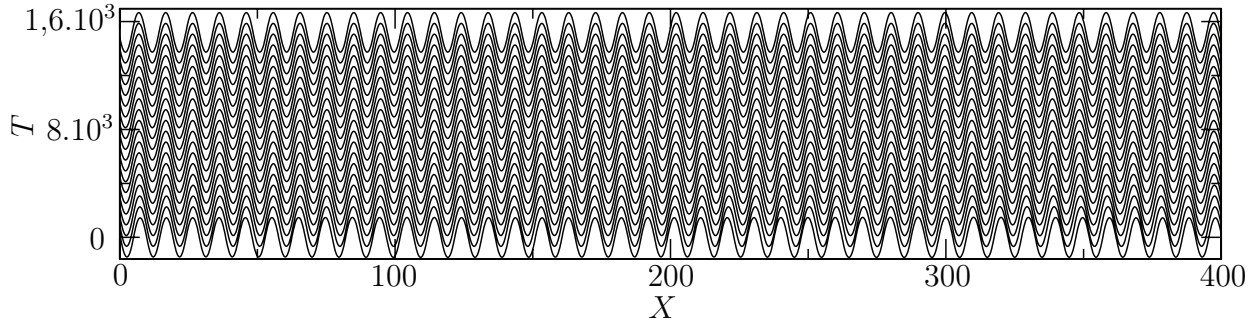


FIGURE 3.5 – Evolution de la membrane en fonction du temps pour TDGL4 en prenant pour condition initiale l'état final d'une simulation pour CH4 non-locale. Chaque courbe correspond à la hauteur de la membrane à un temps donné, nous les translatons en fonction du temps. Pour cette simulation nous avons utilisé la méthode des différences finies avec $\Delta X = 0,2$ et $\Delta T = 10^{-6}$ comme pas d'espace et de temps.

stationnaires des cas non-conservé et conservé vérifient donc la même équation

$$\partial_X^4 H + U'(H) = 0. \quad (3.23)$$

Cette équation admet une multitude de solutions, le but n'est pas ici d'en faire un inventaire exhaustif. Une étude détaillée peut être trouvée dans la littérature [77]. Il existe une infinité de solutions pas forcément périodiques avec un nombre de zéros variable. Nous allons nous concentrer sur l'étude des états stationnaires périodiques de hauteur moyenne \bar{H} nulle et n'ayant que deux zéros par période. L'étude de ces solutions permet de capter l'essentiel des ingrédients pour expliquer le gel de la dynamique. Nous considérons donc un état avec deux plateaux, un dans chaque minimum du potentiel $\pm H_m$, séparés chacun par ce que nous appelons un kink (voir figure 3.6).

La forme analytique exacte de ces solutions ne peut pas être obtenue mais il est tout de même possible de l'évaluer sur les plateaux. Nous considérons un domaine d'adhésion infini qui commence en $X = 0$ et s'étend vers $+\infty$. La hauteur de la membrane peut alors être approximée par $H = H_0 + R(X)$ avec $R(X) \propto \exp(\gamma X)$ petit. En réinjectant dans l'équation (3.23) nous obtenons

$$H_0 = \pm H_m, \quad (3.24)$$

à l'ordre 0 et

$$\gamma^4 + U_m'' = 0, \quad (3.25)$$

à l'ordre 1 car $U'(H_m) = 0$. U_m'' est la dérivée seconde du potentiel en $H = \pm H_m$, cette grandeur étant positive γ va être imaginaire, ce qui veut dire que le bord des domaines est oscillant. Il y a quatre valeurs possibles pour γ :

$$\gamma_k = (U_m'')^{1/4} \exp[(1 + 2k)i\pi/4] \quad (3.26)$$

avec $k = 0, 1, 2, 3$, en reprenant les racines 4-ième de l'unité. Nous allons regarder les solutions avec $H_0 = H_m$. La partie réelle de γ doit être négative, sinon la solution diverge en $X \rightarrow \infty$, il ne reste plus que $k = 1$ ou 2 . L'équation différentielle vérifiée par R étant linéaire il peut s'écrire comme une somme de solutions

$$R(X) = A_1 \exp(\gamma_1 X) + A_2 \exp(\gamma_2 X). \quad (3.27)$$

3.3. ETUDE DES ÉTATS STATIONNAIRES ET CRITÈRE DE STABILITÉ POUR LES ÉTATS STATIONNAIRES PÉRIODIQUES

Il se montre assez facilement que pour avoir une solution réelle il faut que A_1 et A_2 soient des complexes conjugués. La solution finale est donc de la forme

$$\begin{aligned} H &= H_m + A \cos [(U_m''/2^2)^{1/4} X + \alpha] \exp [-(U_m''/2^2)^{1/4} X] \\ &= H_m + R(X), \end{aligned} \quad (3.28)$$

la queue obtenue est oscillante avec une décroissance exponentielle comme nous pouvons le voir sur la solution numérique tracée sur la figure 3.6. Ce type de profil oscillant a déjà été remarqué dans la littérature [19, 66] et étudié expérimentalement [60]. Le tracé de $(H - H_m)^2$ en échelle lin-log confirme la décroissance exponentielle des oscillations. En ajustant le profil trouvé numériquement nous trouvons pour le potentiel de l'équation (3.5) avec $H_m = 0.9$: $\alpha = 2.72$ et $A = 0.87$. Les valeurs de α et A peuvent être estimées approximativement. Par imparité de la hauteur H quand elle s'annule ($X = 0$ ici), les dérivées d'ordre pair doivent s'annuler en 0 :

$$H(X = 0) = 0 \quad (3.29)$$

et

$$\partial_{XX} H(X = 0) = 0. \quad (3.30)$$

Nous en déduisons que $\alpha \approx \pi$ et $A \approx H_m$, en relativement bon accord avec les valeurs numériques.

Dans le cas d'une membrane avec rigidité de courbure, le déplacement des kinks demande la création ou l'annihilation d'oscillations sur les domaines d'adhésion et cela aura un coût énergétique, le gel de la dynamique en est une conséquence. Au contraire, dans le cas de Ginzburg-Landau et Cahn-Hilliard où les états stationnaires vérifient

$$-\partial_{XX} H + U'(H) = 0. \quad (3.31)$$

l'expression analytique de la solution stationnaire à un zéro pour un potentiel donné par l'équation (3.5) est connue. C'est une tangente hyperbolique, une solution monotone sans aucune oscillation. Le mûrissement n'est pas freiné ou stoppé par les oscillations.

3.3.2 Critère de stabilité général pour les états stationnaires périodiques dans les systèmes variationnels 1D

Nous allons ici développer un critère de stabilité pour les états stationnaires et périodiques d'un système variationnel, c'est-à-dire les systèmes dont l'énergie décroît avec le temps. Notre système est bien variationnel comme il a été montré au début de ce chapitre (voir équation (3.2)). Il est donc possible de lui appliquer ce critère de stabilité. Nous considérons un profil $H(X, T)$ infini stationnaire et périodique de hauteur moyenne nulle et nous allons le perturber pour tester sa stabilité. Le développement d'un critère pour savoir s'il va y avoir du mûrissement ou non en fonction de la longueur d'onde λ du système peut être effectué en utilisant la méthode de l'équation de la phase [78] où à partir d'un calcul multiéchelle, nous obtenons une équation de diffusion sur la phase $\phi = qX$ où $q = 2\pi/\lambda$. Le signe du coefficient de diffusion nous dit si la longueur d'onde est stable ou non, la méthode et le calcul sont détaillés dans l'appendice C.1. La méthode de l'équation

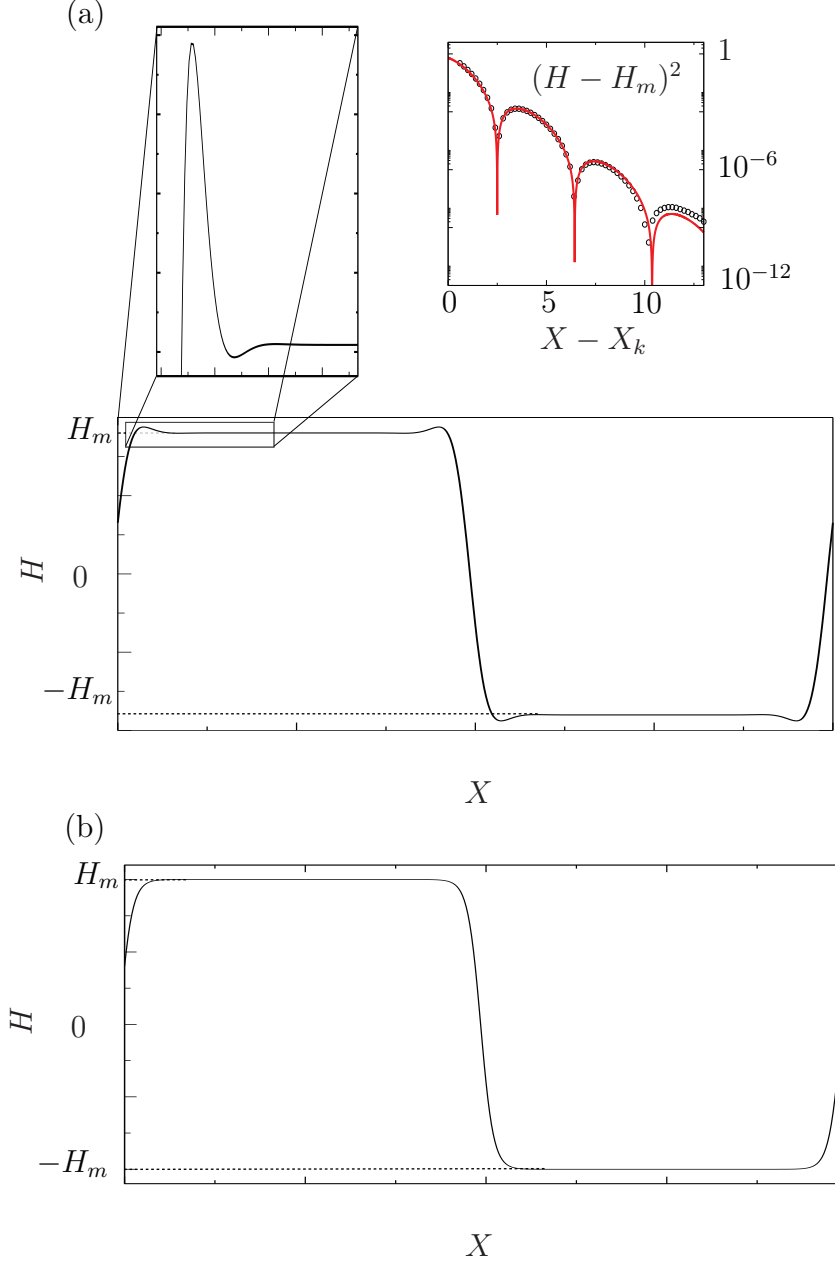


FIGURE 3.6 – (a) Solution périodique stationnaire de TDGL4 et CH4 à deux zéros et $\bar{H} = 0$ obtenue numériquement pour $\lambda = 80$. Le zoom montre les oscillations sur le plateau. En haut à droite, le tracé en échelle lin-log de $(H - H_m)^2$ en fonction de $X - X_k$ où X_k désigne la position du kink. Les points noirs correspondent aux résultats numériques et la courbe rouge correspond à un fit. (b) Solution périodique stationnaire de TDGL et CH.

3.3. ETUDE DES ÉTATS STATIONNAIRES ET CRITÈRE DE STABILITÉ POUR LES ÉTATS STATIONNAIRES PÉRIODIQUES

de phase donne le même résultat que celle décrite par la suite dans le cas non-conservé et le cas conservé sans J . Cependant, notre méthode présente deux avantages. Premièrement les calculs sont plus simple que pour la diffusion de phase et deuxièmement, dans le cas où J est présent, la dynamique est non locale et nous ne savons pas écrire l'équation de diffusion de la phase, alors que notre méthode reste valide.

Dans le cas où le système décroît une énergie (ou plus généralement une fonctionnelle de Lyapunov), nous allons montrer qu'il existe une méthode relativement simple basée sur une étude des variations de l'énergie à grande longueur d'onde.

La longueur d'onde de la membrane perturbée va varier autour de sa valeur moyenne $\bar{\lambda}$ en fonction de la position mais très lentement dans l'espace. Nous définissons \tilde{X} la variable spatiale "lente" qui va décrire les grandes échelles, c'est-à-dire les échelles de taille typique $l \gg \lambda$. La longueur d'onde s'exprime alors $\lambda = \lambda(\tilde{X}) = \bar{\lambda} + \delta\lambda(\tilde{X})$. Appelons e_λ la densité d'énergie à petite échelle de la membrane de longueur d'onde λ . Pour notre problème elle vaut

$$e_{\lambda(\tilde{X})} = \frac{1}{2}(\partial_{XX}H_{\lambda(\tilde{X})})^2 + U(H_{\lambda(\tilde{X})}) \quad (3.32)$$

avec H_λ la hauteur de l'état stationnaire de la membrane de longueur d'onde λ . L'énergie totale de la membrane peut être approximée par l'intégrale sur la membrane de la densité d'énergie à grande échelle qui correspond en fait à la densité d'énergie moyenne d'une longueur d'onde

$$E_{mem} = \int d\tilde{X} \frac{1}{\lambda(\tilde{X})} \int_0^{\lambda(\tilde{X})} dX e_{\lambda(\tilde{X})}(X). \quad (3.33)$$

La variation de cette énergie entre le système périodique et le système perturbé, à nombre de longueurs d'onde fixe et dont le calcul est détaillé dans l'appendice C.2 vaut

$$\delta E_{mem} = \frac{\partial_{\tilde{\lambda}} \mathcal{L}_{\tilde{\lambda}}}{\tilde{\lambda}^2} \int d\tilde{X} [\delta\lambda(\tilde{X})]^2 + \mathcal{O}(\delta\lambda(\tilde{X})^3) \quad (3.34)$$

où

$$\mathcal{L}_\lambda = - \int_0^\lambda dX (\partial_{XX}H_\lambda)^2. \quad (3.35)$$

Cette grandeur est à un facteur près l'opposé de l'énergie de courbure de la membrane sur une longueur d'onde.

Il a été montré au tout début du chapitre 3 que l'énergie de la membrane ne pouvait que diminuer au cours du temps, donc forcément $\delta E_{mem} \leq 0$. Si $\partial_{\tilde{\lambda}} \mathcal{L}_{\tilde{\lambda}} > 0$ cela implique que la norme \mathcal{L}^2 de $\delta\lambda$, $\int (\delta\lambda)^2$, doit décroître, et donc la perturbation décroît : le système est stable. Si au contraire $\partial_{\tilde{\lambda}} \mathcal{L}_{\tilde{\lambda}} < 0$, alors $\int (\delta\lambda)^2$ doit augmenter : le système est instable. Dans l'appendice C.2 nous obtenons un critère de stabilité similaire avec une forme de l'énergie beaucoup plus générale.

Nous pouvons évaluer \mathcal{L}_λ pour les membranes aux grandes longueurs d'onde en utilisant la forme analytique approximée sur les plateaux des états stationnaires (voir equation (3.28)). Nous considérons une longueur d'onde λ suffisamment grande et plaçons le premier zéro en $X = 0$ de telle sorte que $\partial_X H_\lambda|_{X=0} > 0$. Loin des kinks la hauteur de la membrane

est environ égale à

$$\begin{aligned} H_\lambda &= H_m + R(X) + R(\lambda/2 - X) \\ &= H_m + A \cos \left[(U_m''/2^2)^{1/4} X + \alpha \right] \exp \left[-(U_m''/2^2)^{1/4} X \right] \\ &\quad + A \cos \left[(U_m''/2^2)^{1/4} (\lambda/2 - X) + \alpha \right] \exp \left[-(U_m''/2^2)^{1/4} (\lambda/2 - X) \right], \end{aligned} \quad (3.36)$$

dans le cas d'un antikink ($\partial_X H_\lambda|_{X=0} < 0$) ce serait l'exact opposé ($\times(-1)$) par symétrie du problème. Sur les domaines d'adhésion, la hauteur correspond à la somme des deux queues, celle venant de $X = 0$, et celle venant de $X = \lambda/2$. Nous pouvons ensuite écrire à l'ordre dominant

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\lambda &\approx \mathcal{L}_0 - 2 \int_0^{\lambda/2} dX \left[\partial_{XX} (\delta H(X) + \delta H(\lambda/2 - X)) \right]^2 \\ &= \mathcal{L}_0 + A^2 U_m'' \lambda \cos \left(\frac{\lambda U_m''^{1/4}}{2^{3/2}} + 2\alpha \right) \exp \left(-\frac{\lambda U_m''^{1/4}}{2^{3/2}} \right), \end{aligned} \quad (3.37)$$

l'intégrale entre 0 et $\lambda/2$ étant strictement égale à l'intégrale entre $\lambda/2$ et λ . Ici, \mathcal{L}_0 est une constante d'ajustement.

Cette approximation est tracée en pointillé sur la figure 3.7 et reproduit bien le comportement de la courbe pleine obtenue numériquement pour les grandes longueurs d'onde. Nous pouvons enfin remarquer que le critère de stabilité oscille avec la même longueur d'onde que le profil de la membrane sur les plateaux. Ceci semble conforter l'idée intuitive d'une interaction oscillante entre les kinks due aux oscillations du profil de la membrane.

Sur la figure 3.7 la courbe de \mathcal{L}_λ est superposée avec les distributions de longueurs d'onde obtenus dans les simulations de TDGL4 en bleu et CH4 en rouge. Nous remarquons d'abord que pour le cas conservé (CH4) il y a un seul pic très proche de λ_m , la longueur d'onde la plus instable, et cela correspond avec une zone à dérivée positive. Les états stationnaires périodiques à longueur d'onde la plus instable linéairement sont donc stables, et par conséquent le système reste gelé.

Pour le cas non-conservé, en toute rigueur, notre critère de stabilité ne s'applique pas car nous ne sommes pas en présence d'un état périodique. Cependant, le critère nous donne quand même des informations sur les états stables du système. La distribution des longueurs d'onde est plus étendue mais nous pouvons voir que les deux premiers pics correspondent à des zones où $\partial_\lambda \mathcal{L}_\lambda$ est positif. Le système semble se réarranger jusqu'à ce qu'il ne subsiste plus que les distances interkinks correspondant à des états périodiques stables. Le système mettant beaucoup de temps à relaxer, la statistique n'est pas très bonne, notamment pour les grandes longueurs d'onde. Nous voyons tout de même assez nettement les deux premiers pics. L'accord entre nos simulations et le critère de stabilité est donc assez bon. Nous irons un peu plus loin dans l'étude des états stationnaires apériodiques dans le chapitre suivant à l'aide des modèles de kinks.

3.3. ETUDE DES ÉTATS STATIONNAIRES ET CRITÈRE DE STABILITÉ POUR LES ÉTATS STATIONNAIRES PÉRIODIQUES

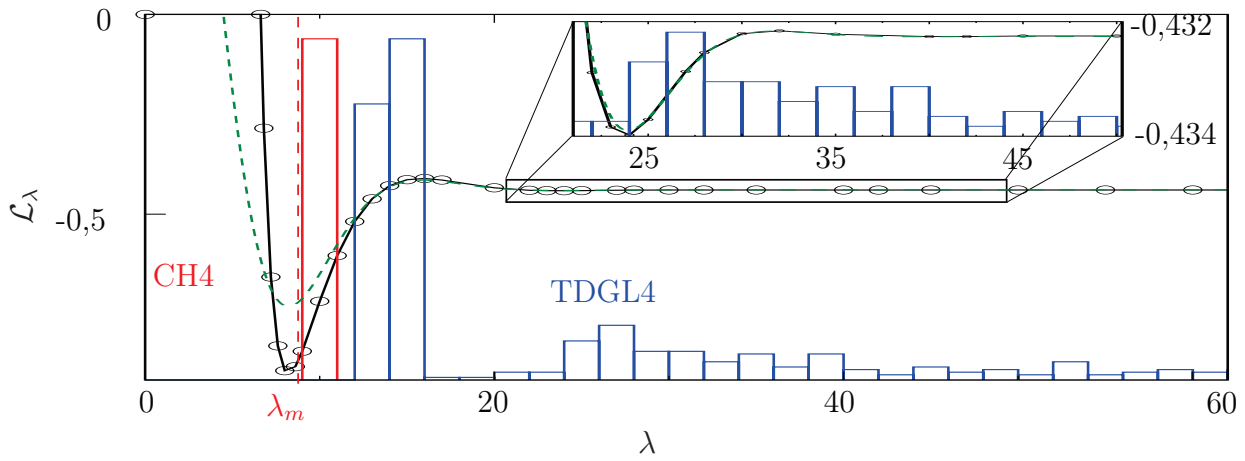


FIGURE 3.7 – \mathcal{L}_λ en fonction de la longueur d'onde. Les points noirs ont été obtenus numériquement, ils sont reliés par une courbe pleine. La courbe en pointillé correspond à l'expression approximée. L'histogramme rouge correspond à la distribution des longueurs d'onde du cas conservé (CH4, murs imperméables) et l'histogramme bleu correspond au cas non-conservé (TDGL4, murs très perméables). La position de la longueur d'onde la plus instable de CH4 est indiquée par λ_m .

Chapitre 4

Modèle de kinks

Nous venons de voir que la dynamique d'une membrane unidimensionnelle confinée entre deux murs était gelée. Ce phénomène peut être compris à l'aide des états stationnaires, nous avons alors développé un critère de stabilité pour les états stationnaires périodiques. Afin d'aller un peu plus loin dans la compréhension des états stationnaires, nous avons développé un modèle effectif de kinks inspiré par les précédents travaux de K. Kawasaki et T. Ohta [47, 48]. Les modèles de kinks permettront par ailleurs d'effectuer des simulations numériques très efficaces dans les chapitres suivants. Les kinks sont présents dans d'autres systèmes comme l'ADN [98] ou les circuits électriques [58].

Dans ce type de modèle, les kinks sont considérés comme des particules qui interagissent entre elles. A partir de maintenant, les zéros avec une pente positive seront appelés kink et les zéros avec une pente négative antikink s'il y a lieu de les différencier et seront appelés juste kink dans le cas contraire. De plus, nous allons considérer le cas d'une membrane avec une énergie généralisée de la forme

$$E_{mem} = \int dX \left[U(H) - \frac{1}{2} \sum_i (-1)^i a_{2i} (\partial_X^i H)^2 \right], \quad (4.1)$$

qui donne les équations d'évolution suivantes

$$\partial_T H = -U'(H) + L_{in}[H], \quad (4.2)$$

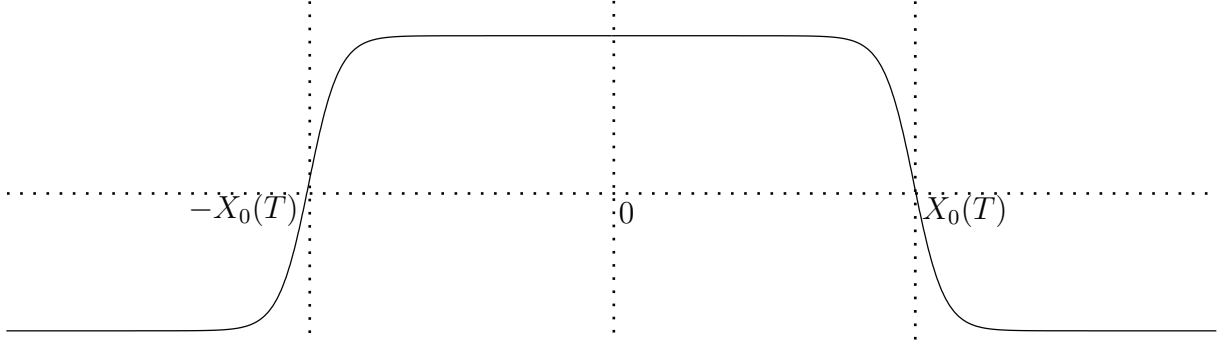
$$\partial_T H = -\partial_X [M(H) \partial_X (-U'(H) + L_{in}[H])], \quad (4.3)$$

dans les cas non-conservé et conservé respectivement. Le débit du fluide J qui ne semble pas influencer la dynamique est omis. L_{in} désigne un opérateur linéaire et il vaut

$$L_{in}[H] = \sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} H. \quad (4.4)$$

De plus, le terme de mobilité $M(H)$ vaut $(1 - H^2)^3$ pour notre problème. Nous considérons ici le cas général. Pour membrane avec une rigidité de courbure tous les a_{2i} sont nuls sauf a_4 qui vaut -1 .

Présentons dans un premier temps un exemple de dérivation pour le cas simple d'un domaine d'adhésion isolé. Ce domaine est délimité par un kink en $-X_0(T)$ et un antikink

FIGURE 4.1 – Schéma d'un domaine d'adhésion isolé de taille $2X_0$ centré en 0.

en $X_0(T)$ (voir figure 4.1) et nous considérons l'équation de Ginzburg-Landau (équation (4.2) avec $a_2 = 1$ et tous les autres a_{2i} nuls) et $U(H) = H^4/4 - H_m^2 H^2/2$. Par symétrie les deux kinks vont se déplacer à des vitesses opposées. La solution stationnaire d'un kink isolé vaut $H^0(X) = H_m \tanh(U_m''^{1/2} X/2)$ avec U_m'' la dérivée seconde du potentiel en $\pm H_m$. Dans la limite où X_0 est grand devant l'épaisseur d'un kink la hauteur de la membrane peut être approximée par

$$\begin{aligned} H(X, T) &= H^0(X + X_0(T)) - H^0(X - X_0(T)) - H_m \\ &= H_+^0 - H_-^0 - H_m. \end{aligned} \quad (4.5)$$

En réinjectant dans l'équation (4.2) avec $a_2 = 1$ et tous les autres a_{2i} nuls cela donne

$$2^{1/2} \dot{X}_0 \left[H_m^2 - H_+^{0\,2} + H_m^2 - H_-^{0\,2} \right] = 6 \left[H_-^0 - H_+^0 \right] \left[H_m - H_+^0 \right] \left[H_m + H_-^0 \right]. \quad (4.6)$$

Afin d'obtenir un résultat qualitatif, nous nous plaçons simplement dans le voisinage de $-X_0$, i.e. $X = -X_0 + \epsilon$. Dans cette limite, $H_-^0 \rightarrow -H_m$ et $H_m + H_-^0 \rightarrow -R(2X_0)$. Nous trouvons donc qu'à l'ordre dominant

$$2\dot{X}_0 = 6\sqrt{2}R(2X_0). \quad (4.7)$$

La vitesse d'évolution de la longueur du domaine est principalement proportionnelle à $R(2X_0) = H^0(2X_0) - H_m$ et décroît donc exponentiellement avec la distance. Nous allons par la suite présenter des dérivations plus systématiques de la dynamique pour une distribution de N kinks.

4.1 Présentation du modèle de K. Kawasaki et T. Ohta

Avant de passer à notre modèle nous allons présenter brièvement des travaux réalisés dans les années 80 par K. Kawasaki et T. Ohta qui cherchaient à résoudre la dynamique des équations de Ginzburg-Landau dépendant du temps (TDGL) et de Cahn-Hilliard (CH). Dans le cadre de ces équations leur modèle fonctionne bien mais montre ses limites dans le cas des équations d'ordre 4 (TDGL4 et CH4). Le détail des calculs se trouvent en

4.1. PRÉSENTATION DU MODÈLE DE K. KAWASAKI ET T. OHTA

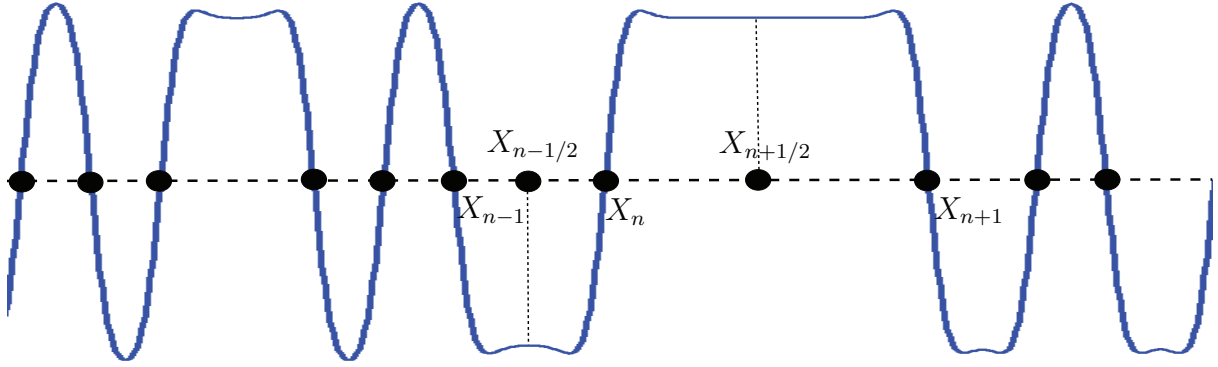


FIGURE 4.2 – Schéma explicatif pour les modèles de kink. X_n avec n entier désigne la position du n -ième kink et $X_{n+1/2}$ désigne la position de la mi-distance entre le n -ième et le $(n + 1)$ -ième kink.

appendice D.1. L'idée principale des modèles de kink est de dériver une équation qui ne fait intervenir que la position des kinks qui sont alors vus comme des particules interagissant entre elles. La position du n -ième kink de la membrane est notée X_n et nous nous plaçons dans la limite où les kinks sont loin les uns des autres

$$X_{n+1} - X_n \gg a \quad (4.8)$$

où a est la largeur d'un kink. Nous allons considérer la solution stationnaire H^0 qui n'a qu'un seul zéro et qui vaut $-H_m$ en $-\infty$, H_m en $+\infty$ et 0 en $X = 0$. Nous posons $H_n(X, T) = H^0(X - X_n(T))$ pour un kink et $H_n(X, T) = -H^0(X - X_n(T))$ pour un antikink. L'idée de Kawasaki et Ohta est d'écrire qu'à proximité d'un kink de position X_n (par symétrie du potentiel le résultat sera le même pour un antikink), la hauteur de la membrane vaut environ

$$H(X, T) = H_n(X, T) + \epsilon(X) \quad (4.9)$$

avec

$$\epsilon(X) = \sum_{k>n} [H_k(X, T) - H_k(-\infty)] + \sum_{k<n} [H_k(X, T) - H_k(+\infty)]. \quad (4.10)$$

Dans la première somme de cet ansatz chaque terme vaudra environ $-R(X - X_k)$ pour un kink et $R(X - X_k)$ pour un antikink (c'est l'inverse dans la deuxième somme) avec

$$R(X) = H^0(X) - H_m, \quad X > 0. \quad (4.11)$$

ϵ est alors d'ordre 1 et correspond à la somme des valeurs que prendraient les queues des kinks en $X \sim X_n$ si chaque kink était isolé.

En utilisant les équations (4.9) et (4.10) nous obtenons

$$\partial_T H = - \sum_k \dot{X}_k \partial_X H_k, \quad (4.12)$$

ce qui nous donne le terme de gauche dans les équations (4.2) et (4.3). Pour le terme de droite, H est directement remplacé par son expression (equation (4.9)) puis après un peu de calcul détaillé en appendice D.1, nous obtenons les expressions

$$\dot{X}_n = -\frac{U_m'' \Delta H}{\int dX (\partial_X H_n)^2} [R(l_{n+1/2}) - R(l_{n-1/2})], \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_n = & -\frac{U_m'' M(H_m)}{\Delta H} \times \\ & \left[\frac{1}{l_{n+1/2}} (R(l_{n+3/2}) - R(l_{n-1/2})) + \frac{1}{l_{n-1/2}} (R(l_{n+1/2}) - R(l_{n-3/2})) \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

pour les cas non-conservé et conservé respectivement où $\Delta H = 2H_m$ est la distance entre les deux minimums du potentiel, U_m'' est la dérivée seconde du potentiel en $\pm H_m$, $l_{n+1/2} = X_{n+1} - X_n$ et R est la forme analytique de la queue de la solution stationnaire H^0 en $+\infty$.

Il suffit alors de connaître la forme des états stationnaires pour en déduire la dynamique globale. De plus, comme le potentiel choisi est symétrique, les équations sont les mêmes pour les kinks et les antikinks. Il est connu que pour TDGL et CH ($a_2 = 1$ et tous les autres a_{2i} sont nuls et $M = 1$) avec $U(H) = H^4/4 - H_m^2 H^2/2$, $H^0 = H_m \tanh\left(\frac{U_m''^{1/2}}{2} X\right)$, donc

$$R(X) = -2H_m \exp\left(-U_m''^{1/2} X\right), \quad (4.15)$$

les équations de la dynamique de kinks deviennent dans ce cas là

$$\dot{X}_n = 6\sqrt{2}H_m \left[\exp\left(-U_m''^{1/2} l_{n+1/2}\right) - \exp\left(-U_m''^{1/2} l_{n-1/2}\right) \right], \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_n = & 2H_m \left[\frac{1}{l_{n+1/2}} \left(\exp(-U_m''^{1/2} l_{n+3/2}) - \exp(-U_m''^{1/2} l_{n-1/2}) \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{l_{n-1/2}} \left(\exp(-U_m''^{1/2} l_{n+1/2}) - \exp(-U_m''^{1/2} l_{n-3/2}) \right) \right], \end{aligned} \quad (4.17)$$

pour les cas non-conservé et conservé respectivement. L'équation (4.16) du cas non-conservé a été corrigée par S.-I. Ei et T. Ohta [26] qui trouvent un facteur 2 supplémentaire.

Dans le cas non-conservé (TDGL), un kink et un antikink isolés séparés de la distance l vont se déplacer l'un vers l'autre suivant la relation

$$\partial_t l = -12\sqrt{2}H_m \exp\left(-U_m''^{1/2} l\right). \quad (4.18)$$

La fonction exponentielle étant monotone, les deux kinks vont se déplacer toujours dans la même direction jusqu'à se rejoindre et s'annihiler. Les interactions sont toujours attractives, nous aurons alors du mûrissement, nous retrouvons donc un résultat connu. Pour le cas conservé (CH), la hauteur moyenne est une constante du temps donc si nous avons un kink et un antikink isolés ils vont forcément rester à distance constante. Les annihilations impliquent le mouvement d'au moins trois kinks pour pouvoir conserver la hauteur moyenne de la membrane.

4.2. DÉRIVATION D'UN NOUVEAU MODÈLE

Dans le cas d'une membrane avec une rigidité de courbure ($a_4 = -1$ et tous les autres coefficients sont nuls et $M(H) = (1 - H^2)^3$) le profil des queues des kinks sera différent,

$$R(X) = A \cos [(U_m''/2^2)^{1/4} X + \alpha] \exp [(U_m''/2^2)^{1/4} X], \quad (4.19)$$

et donc les équations de la dynamique de kinks deviennent

$$\begin{aligned} \dot{X}_n &= \frac{U_m'' \Delta H A}{\int dX (\partial_X H^0)^2} [\cos (\Omega_{n+1/2} + \alpha + \pi) \exp (-\Omega_{n+1/2}) \\ &\quad - \cos (\Omega_{n-1/2} + \alpha + \pi) \exp (-\Omega_{n-1/2})], \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_n &= (1 - H_m^2)^3 \frac{A U_m''}{\Delta H} \times \\ &\quad \left\{ \frac{1}{l_{n+1/2}} [\cos (\Omega_{n+3/2} + \alpha + \pi) \exp (-\Omega_{n+3/2}) - \cos (\Omega_{n-1/2} + \alpha + \pi) \exp (-\Omega_{n-1/2})] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{l_{n-1/2}} [\cos (\Omega_{n+1/2} + \alpha + \pi) \exp (-\Omega_{n+1/2}) - \cos (\Omega_{n-3/2} + \alpha + \pi) \exp (-\Omega_{n-3/2})] \right\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

dans les cas non-conservé et conservé respectivement, où $\Omega = (U_m''/2^2)^{1/4}$. Dans le cas d'un kink et d'un antikink isolés séparés de l la vitesse de déplacement sera pour le cas non-conservé (TDGL4)

$$\partial_t l = -2 \frac{U_m'' \Delta H A}{\int dX (\partial_X H^0)^2} \cos (\Omega l + \alpha + \pi) \exp (\Omega l), \quad (4.22)$$

cette fois la vitesse est une fonction oscillante de la distance l , l'interaction entre les kinks sera oscillante également. Il ne pourra pas y avoir d'annihilation car la vitesse finira par s'annuler et la dynamique sera alors gelée, ce qui est en accord avec nos simulations de l'équation complète. Dans le cas conservé (CH4), il faut qu'il y ait au moins trois kinks impliqués pour pouvoir avoir des dynamiques non triviales mais le comportement est le même, nous avons des interactions oscillantes qui gèlent la dynamique.

Bien que ce modèle capte globalement le bon comportement, nous verrons qu'il ne décrit pas bien quantitativement la dynamique (voir section 4.3), notamment en ce qui concerne les tailles de domaines stables et instables. Le point de départ de l'approche de Kawasaki et Ohta étant de décrire la membrane par un ansatz basé sur une superposition linéaire de solutions de l'équation stationnaire qui est non linéaire, il n'est pas étonnant de ne pas décrire exactement la dynamique. Dans le paragraphe suivant nous allons proposer un autre calcul qui permet de décrire plus précisément la dynamique.

4.2 Dérivation d'un nouveau modèle

Pour cette nouvelle dérivation, notre stratégie est la suivante. Tout d'abord, la dynamique dans la zone d'un kink est approximée par celle d'un état stationnaire dérivant à vitesse constante. Cela nous permet de relier la vitesse des kinks au profil de H loin des kinks. Dans un deuxième temps, le profil loin des kinks est approximé par une portion d'état stationnaire périodique (voir figure 3.6) dont la demi-longueur d'onde correspondrait à la distance entre les 2 kinks successifs. Nous obtenons alors une expression pour

la vitesse des kinks en fonction de la position des kinks voisins. Dans cette expression, les constantes faisant intervenir des intégrales sur le profil des kinks sont calculées en substituant le profil connu d'un kink isolé de vitesse nulle H^0 .

Cas non-conservé

Reprenons l'équation générale (4.2). Nous posons

$$X_{n+1/2} = \frac{X_n + X_{n+1}}{2} \quad (4.23)$$

la position à mi-distance entre les kinks n et $n+1$, l'indice $n+1/2$ dans les bornes des intégrales signifie $X_{n+1/2}$. Nous posons également $H_{n+1/2}$ la hauteur de la membrane en $X = X_{n+1/2}$ et considérons toujours que les kinks sont éloignés et se déplacent sans changement de forme, nous pouvons ainsi écrire pour le kink n

$$-\dot{X}_n \partial_X H = -U'(H) + L_{in}[H] = -U'(H) + \sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} H. \quad (4.24)$$

En multipliant par $\partial_X H$ et en intégrant cela donne

$$-\dot{X}_n \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} dX (\partial_X H)^2 = \sum_i a_{2i} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} dX \partial_X H \partial_X^{2i} H - U(H_{n+\frac{1}{2}}) + U(H_{n-\frac{1}{2}}). \quad (4.25)$$

Par intégrations par parties successives, $-\dot{X}_n \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} dX (\partial_X H)^2$ est obtenu en fonction du profil H en $X_{n-1/2}$ et en $X_{n+1/2}$. Puisque le profil entre deux kinks est approximé par une portion d'état stationnaire périodique, par symétrie les dérivées impaires sont nulles en $X = X_{n+1/2}$. Finalement, nous obtenons une équation pour la vitesse du n -ième kink

$$\dot{X}_n = \frac{1}{\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} dX (\partial_X H)^2} \left[\sum_i a_{2i} \left(\frac{(-1)^i}{2} [(\partial_X^i H)^2]_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{k < \frac{i}{2}} [\partial_X^{2k} H \partial_X^{2i-2k} H]_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + U(H_{n+\frac{1}{2}}) - U(H_{n-\frac{1}{2}}) \right]. \quad (4.26)$$

Il est important de remarquer que les bornes d'intégration $X_{n-1/2}$ et $X_{n+1/2}$ sont arbitraires. Nous pourrions choisir a priori d'autres points de références et obtenir le même résultat. Ce point est discuté plus loin dans le cas d'une membrane sans tension avec une rigidité de courbure, c'est-à-dire $a_4 \neq 0$ et $a_i = 0$ si $i \neq 4$ (se référer aux équations (5.39) et (5.43)).

Entre les kinks n et $n+1$ le profil loin de ceux-ci est celui d'un état stationnaire (décrit dans la sous-section 3.3.1) et vaut

$$H(X, T) \simeq \pm [H_m + R(X - X_n) + R(X_{n+1} - X)], \quad (4.27)$$

selon que n soit un kink (+) ou un antikink (-). Les deux queues provenant du kink n et du kink $n+1$ sont sommées. En réinjectant dans l'équation de dynamique de kinks nous obtenons

$$\dot{X}_n = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} dX (\partial_X H^0)^2} f(l_{n+1/2}, l_{n-1/2}) \quad (4.28)$$

4.2. DÉRIVATION D'UN NOUVEAU MODÈLE

où nous rappelons que $l_{n+1/2} = X_{n+1} - X_n$, et définissons

$$f(x, y) = \sum_i a_{2i} \left[(1 + (-1)^i) \left(R^{(i)} \left(\frac{x}{2} \right)^2 - R^{(i)} \left(\frac{y}{2} \right)^2 \right) - 4 \sum_{k=1}^{k < \frac{i}{2}} \left(R^{(2k)} \left(\frac{x}{2} \right) R^{(2i-2k)} \left(\frac{x}{2} \right) - R^{(2k)} \left(\frac{y}{2} \right) R^{(2i-2k)} \left(\frac{y}{2} \right) \right) \right] + 2U_m'' \left(R^2 \left(\frac{x}{2} \right) - R^2 \left(\frac{y}{2} \right) \right). \quad (4.29)$$

Les indices supérieurs entre parenthèses désignent l'ordre de la dérivée. Comme les kinks sont considérés éloignés les uns des autres, les bornes sont prises à l'infini dans l'intégrale du dénominateur et il est considéré que $H \simeq H^0$ dans le préfacteur de l'équation (4.28).

Pour Ginzburg-Landau dépendant du temps en reprenant l'expression de R (4.15) nous obtenons

$$\dot{X}_n = 12\sqrt{2}H_m \left[\exp \left(-U_m'^{1/2} l_{n+1/2} \right) - \exp \left(-U_m'^{1/2} l_{n-1/2} \right) \right] \quad (4.30)$$

ce qui est à un facteur deux près la même équation que pour le modèle de K. Kawasaki et T. Ohta, et en accord parfait avec S.-I. Ei et T. Ohta [26].

Les deux modèles diffèrent pour l'équation d'ordre 4 de la membrane avec une rigidité de courbure, l'équation de la dynamique de kinks est alors

$$\dot{X}_n = \frac{2U_m'' A^2}{\int dX (\partial_X H^0)^2} \left[\cos(\Omega l_{n+1/2} + 2\alpha) \exp(-\Omega l_{n+1/2}) - \cos(\Omega l_{n-1/2} + 2\alpha) \exp(-\Omega l_{n-1/2}) \right]. \quad (4.31)$$

Le préfacteur contient un terme $2A^2$ au lieu de $\Delta H A = 2H_m A$ dans le modèle de Kawasaki et Ohta. De plus, nous trouvons un déphasage de 2α au lieu de $\alpha + \pi$ dans le modèle de K. Kawasaki et T. Ohta. En conséquence, en prenant les valeurs approximatives $\alpha \approx \pi$ et $A \approx H_m$, nous retrouvons l'expression de K. Kawasaki et T. Ohta. Cependant, nous avons montré dans la sous-section 3.3.1 que les valeurs de α et A s'écartent de ces valeurs approximatives. Par exemple, $A \approx 0,87$ et $\alpha \approx 2,72$ pour le potentiel quartique (3.5) avec $H_m = 0,9$.

Cas conservé

Partons cette fois-ci de l'équation (4.3). Le cas conservé demande plus de calcul, les détails se trouvent en appendice D.2. L'équation finale est

$$\dot{X}_n = \frac{M(H_m)}{(\Delta H)^2} \left\{ \frac{1}{l_{n+1/2}} \left[\dot{X}_{n+1} A_{n+1} + \dot{X}_n A_n + f(l_{n+3/2}, l_{n-1/2}) \right] + \frac{1}{l_{n-1/2}} \left[\dot{X}_n A_n + \dot{X}_{n-1} A_{n-1} + f(l_{n+1/2}, l_{n-3/2}) \right] \right\} \quad (4.32)$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\dot{X}_n = \frac{1}{[(\Delta H)^2 / M(H_m)] l_{n-1/2} l_{n+1/2} - A_n (l_{n-1/2} + l_{n+1/2})} \times \left\{ l_{n-1/2} \left[\dot{X}_{n+1} A_{n+1} + f(l_{n+3/2}, l_{n-1/2}) \right] + l_{n+1/2} \left[\dot{X}_{n-1} A_{n-1} + f(l_{n+1/2}, l_{n-3/2}) \right] \right\} \quad (4.33)$$

avec

$$A_n = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} dX \partial_X H \int_{n-\frac{1}{2}}^X dX' (H - H_{n-\frac{1}{2}}) \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} dX (H^0 + H_m)(H_m - H^0) \equiv A^0, \quad (4.34)$$

par intégration par parties et dans la limite des kinks éloignés. En général, nous nous attendons à ce que $A^0 > 0$. En conséquence, dans la deuxième expression de la dynamique (équation (4.33)), le dénominateur peut s'annuler et la vitesse du kink diverger. Cependant cela n'arrive qu'aux faibles distances, c'est-à-dire juste avant un événement de mûrissement.

Étudions maintenant les cas particuliers. Pour l'équation de Cahn-Hilliard où $a_2 = 1$, tous les autres coefficients sont nuls et $M = 1$. Dans le cas où $U(H) = H^4/4 - H_m^2 H^2/2$ nous pouvons calculer $A^0 \simeq 2H_m\sqrt{2}$ car nous connaissons H^0 . L'équation qui régit la dynamique de kinks est alors

$$\begin{aligned} \dot{X}_n = & \frac{1}{(\Delta H)^2 l_{n+1/2} l_{n-1/2} - 2H_m\sqrt{2}(l_{n+1/2} + l_{n-1/2})} \\ & \left\{ l_{n-1/2} \left[2H_m\sqrt{2}\dot{X}_{n+1} + 8U_m'' \left(\exp(-U_m''^{1/2} l_{n+3/2}) - \exp(-U_m''^{1/2} l_{n-1/2}) \right) \right] \right. \\ & \left. + l_{n+1/2} \left[2H_m\sqrt{2}\dot{X}_{n-1} + 8U_m'' \left(\exp(-U_m''^{1/2} l_{n+1/2}) - \exp(-U_m''^{1/2} l_{n-3/2}) \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

L'équation a la même structure que pour le modèle de K. Kawasaki et T. Ohta sauf qu'il apparaît des termes sous-dominants en \dot{X}_n en plus. Ces termes sont sous-dominants car divisés par les distance entre deux kinks, ils sont en l^{-1} et non en $\exp(-l)$. Bien que ces termes ne changent pas beaucoup la dynamique ils augmentent la précision de notre modèle et tendent donc ainsi à le valider.

Pour l'équation d'ordre 4 (CH4) de la membrane avec une rigidité de courbure la dynamique de kinks est

$$\begin{aligned} \dot{X}_n = & \frac{2U_m'' A^2}{[(\Delta H)^2/(1 - H_m^2)^3] l_{n+1/2} l_{n-1/2} - A^0(l_{n+1/2} + l_{n-1/2})} \times \\ & \left\{ \frac{A^0}{2U_m'' A^2} (l_{n-1/2} \dot{X}_{n+1} + l_{n+1/2} \dot{X}_{n-1}) \right. \\ & + l_{n-1/2} [\cos(\Omega l_{n+3/2} + 2\alpha) \exp(-\Omega l_{n+3/2}) - \cos(\Omega l_{n-1/2} + 2\alpha) \exp(-\Omega l_{n-1/2})] \\ & \left. + l_{n+1/2} [\cos(\Omega l_{n+1/2} + 2\alpha) \exp(-\Omega l_{n+1/2}) - \cos(\Omega l_{n-3/2} + 2\alpha) \exp(-\Omega l_{n-3/2})] \right\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

De même, la structure est similaire à celle du modèle de K. Kawasaki et T. Ohta, avec les termes sous-dominants en \dot{X}_n en plus. En négligeant ces termes et en se plaçant dans la limite des grandes distances, nous obtenons la même forme que pour l'équation (4.21). Le préfacteur contient un terme $2A^2/(\Delta H)^2$ au lieu de $A/\Delta H$ dans le modèle de K. Kawasaki et T. Ohta et le déphasage est 2α au lieu de $\alpha + \pi$. Avec les valeurs approximatives $A \approx H_m$ et $\alpha \approx \pi$, les équations sont les mêmes pour la dynamique des kinks. Cependant, nous avons vu précédemment que $A = 0,87$ et $\alpha = 2,72$, les dynamiques seront donc différentes.

4.3 Comparaison des deux modèles par simulation

Dans ce paragraphe nous allons présenter des résultats de simulation pour les deux modèles de dynamique de kinks présentés ci-dessus et les comparer avec les simulations de l'équation entière. Pour réaliser ces simulations nous choisissons une distributions de kinks $\{X_n\}$ initiale donnée. Pour les conditions initiales de l'équation complète, si n correspond à un kink et $n + 1$ à un antikink alors nous prenons $H = H^0$ pour X allant de $X_{n-1/2}$ à $X_{n+1/2}$ et $H = -H^0$ entre $X_{n+1/2}$ et $X_{n+3/2}$ et nous faisons de même pour tous les kinks. Le profil de H^0 est obtenu numériquement en relaxant un profil en $\tanh(\sin)$ de grande longueur d'onde. Pour les modèles de kinks nous prenons les positions des zéros de la membrane.

Sur la figure 4.3 sont tracés les résultats de deux simulations par différence finie pour le cas non-conservé. Ces résultats sont superposés avec ceux des modèles de dynamique de kinks. En (a) est représenté le cas de l'équation de Ginzburg-Landau dépendant du temps (TDGL). La dynamique est la même à un facteur près en accord avec les équations trouvées auparavant. Dans tous les cas, les deux kinks s'attirent l'un vers l'autre par une interaction exponentielle jusqu'à s'annihiler. Pour la simulation des annihilations nous avons procédé de la manière suivante : lorsque deux kinks se croisent nous retournons au pas de temps précédent $t - \Delta t$ puis nous extrapolons le temps $\Delta t'$ qu'il faudrait pour que les deux kinks se retrouvent à la même position s'il gardent leur vitesse de $t - \Delta t$. Ce temps $\Delta t'$ est pris comme pas de temps puis les deux kinks qui se croisent sont éliminés. La simulation est ensuite reprise avec deux kinks de moins et le pas de temps initial Δt .

En (b) ce sont les résultats de la simulation pour le cas non-conservé d'ordre 4 (TDGL4) où nous avons utilisé exactement la même méthode pour les simulations. Nous avons choisi un cas où les vitesses des kinks sont de signes opposés pour le modèle de K. Kawasaki et T. Ohta et pour le nôtre. Comme les interactions sont oscillantes avec un déphasage différent, cette situation peut bien exister. Pour Kawasaki en bleu, les kinks se déplacent dans la mauvaise direction et les distances finales entre les kinks sont mauvaises tandis que pour notre modèle en rouge, les trajectoires sont très similaires à celle de la simulation entière en noir.

Sur la figure 4.4 il est reporté les résultats des simulations pour le cas conservé. En (a) ce sont les résultats de l'équation de Cahn-Hilliard où les interactions entre les kinks sont exponentielles. Les deux modèles ne diffèrent que par une constante et celui de K. Kawasaki et T. Ohta en vert semble plus éloigné des courbes noires qui représentent la simulation de l'équation complète que le nôtre. De plus, nous avons simulé notre modèle en prenant en compte les termes sous-dominant en \dot{X}_n en rouge ou pas en bleu. Nous voyons qu'en les prenant en compte nous nous rapprochons de la dynamique réelle, ce qui tend à renforcer notre confiance dans la validité de notre modèle. En (b) ce sont les résultats de l'équation conservé d'ordre 4 (CH4) avec une mobilité constante $M = 1$ où nous avons encore volontairement montré une situation où les vitesses des kinks sont de signes opposés à cause de la différence de déphasage des interactions oscillantes obtenues par les deux modèles.

Pour le cas conservé, le dénominateur de l'équation (4.36) peut s'annuler lorsque les kinks se rapprochent, c'est-à-dire dans le cas d'une collision. Nous rappelons que les collisions dans le cas conservé impliquent toujours au moins trois kinks. Par conservation de la

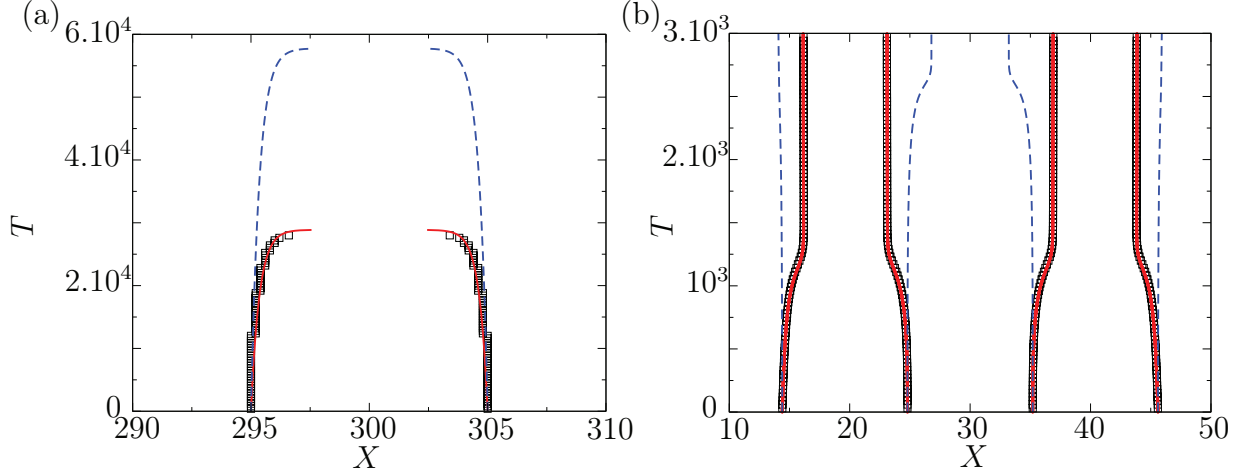


FIGURE 4.3 – (a) Trajectoires des kinks en fonction du temps pour l'équation TDGL. En noir nous avons tracé la trajectoire pour la simulation de l'équation complète, en rouge, pour notre modèle de kink et en bleu, le modèle de K. Kawasaki et T. Ohta. (b) Même chose pour l'équation TDGL4.

hauteur moyenne, les deux domaines entourant le domaine central qui disparaît adaptent leur taille pour assurer la conservation de la hauteur moyenne. Si le kink central est le n -ième kink et que seulement trois kinks sont impliqués ($l_{n-1/2} \ll l_{n-3/2}$ et $l_{n+1/2} \ll l_{n+3/2}$), cela implique que juste avant la collision, $l_{n-1/2} = l_{n+1/2} = l$. Le dénominateur de (4.36) s'annule pour $l = 2A^0/(\Delta H)^2 \approx 1,14$ pour le potentiel choisi et $H_m = 0,9$ (la mobilité M est prise égale à 1 ici). Nous choisissons donc une longueur limite légèrement supérieure à l et nous considérons que quand la distance entre deux kinks successifs est inférieure à cette longueur, ils s'annihilent.

4.4 Etude de stabilité des états stationnaires

Nous avons étudié la stabilité des états stationnaires dans la sous-section 3.3.2. Cependant, cette étude se limite aux états stationnaires périodiques. Grâce aux modèles de kinks présentés ci-dessus, nous pouvons étudier plus en détail la stabilité d'une distribution de kinks et d'antikinks dans le cas non-conservé. Premièrement, la vitesse de chaque kink peut se mettre sous la forme

$$\dot{X}_n = \tilde{R}_{nc}(X_{n+1} - X_n) - \tilde{R}_{nc}(X_n - X_{n-1}), \quad (4.37)$$

où \tilde{R}_{nc} représente l'interaction entre les kinks pour le cas non-conservé, cette interaction est exponentielle dans le cas d'une membrane sans rigidité mais avec une tension (TDGL) et est oscillante dans le cas d'une membrane avec une rigidité de courbure (TDGL4). L'interaction étant une fonction monotone de la distance pour TDGL, les seuls états stationnaires qui peuvent exister sont les systèmes uniformes où pour tout n , $X_{n+1} - X_n = l$. Pour TDGL4, comme l'interaction est oscillante, nous pouvons construire un état stationnaire avec plusieurs longueurs possibles entre deux kinks successifs (voir figure 4.5).

La condition $\dot{X}_n = 0$ impose que $\tilde{R}_{nc}(X_{n+1} - X_n) = r$ pour tous les n , avec r une constante. Considérons une liste de longueurs $\{l_{n+1/2}^* = X_{n+1} - X_n\}$ telle que pour tout

4.4. ETUDE DE STABILITÉ DES ÉTATS STATIONNAIRES

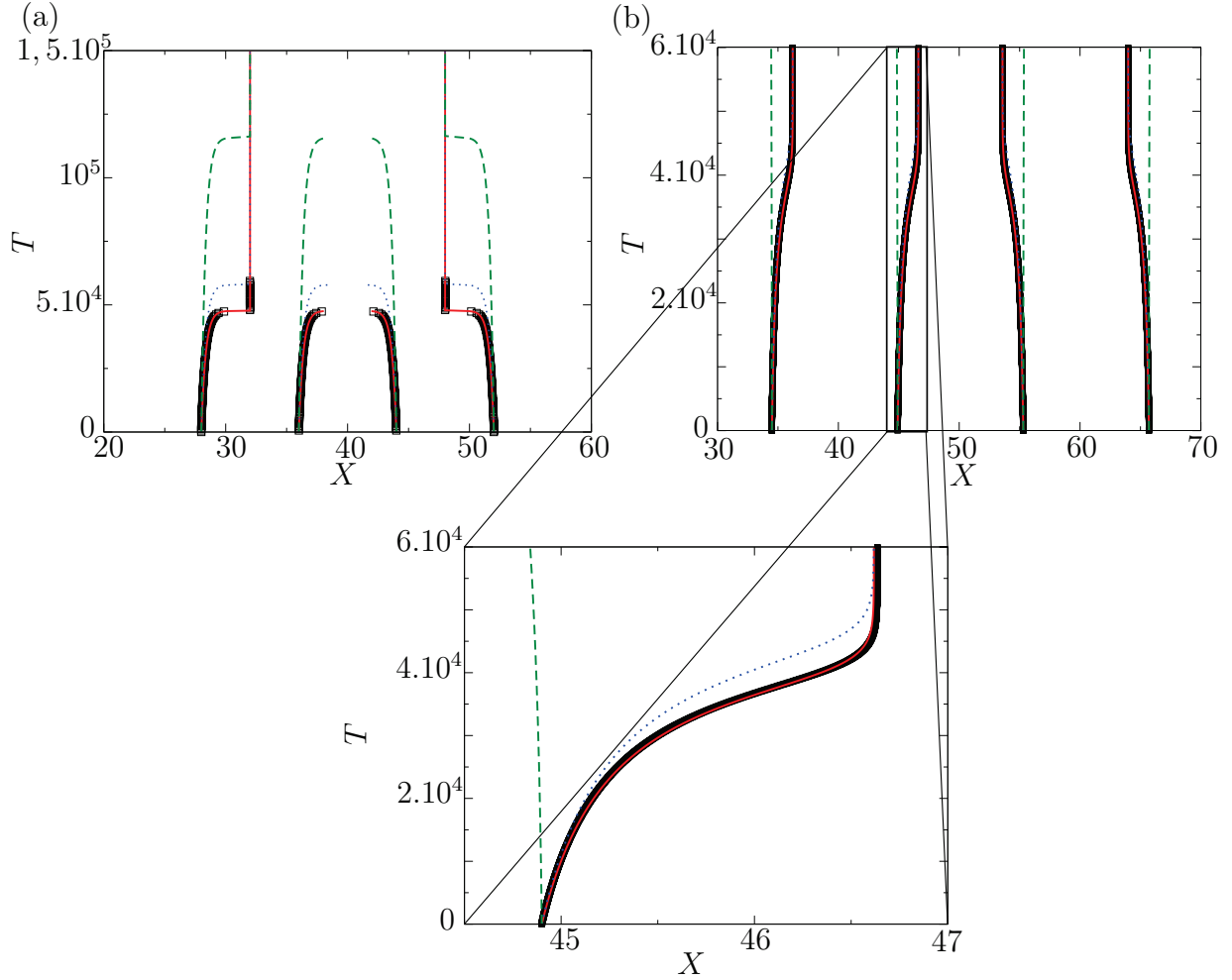


FIGURE 4.4 – (a) Trajectoires des kinks en fonction du temps pour l'équation CH. En noir, nous avons tracé la trajectoire pour la simulation de l'équation complète, en rouge, pour notre modèle de kinks et en bleu, notre modèle sans les termes sous-dominant en \dot{X}_n et en vert, le modèle de K. Kawasaki et T. Ohta. (b) Même chose pour l'équation CH4 où le terme de mobilité vaut $M = 1$ avec un zoom en bas.

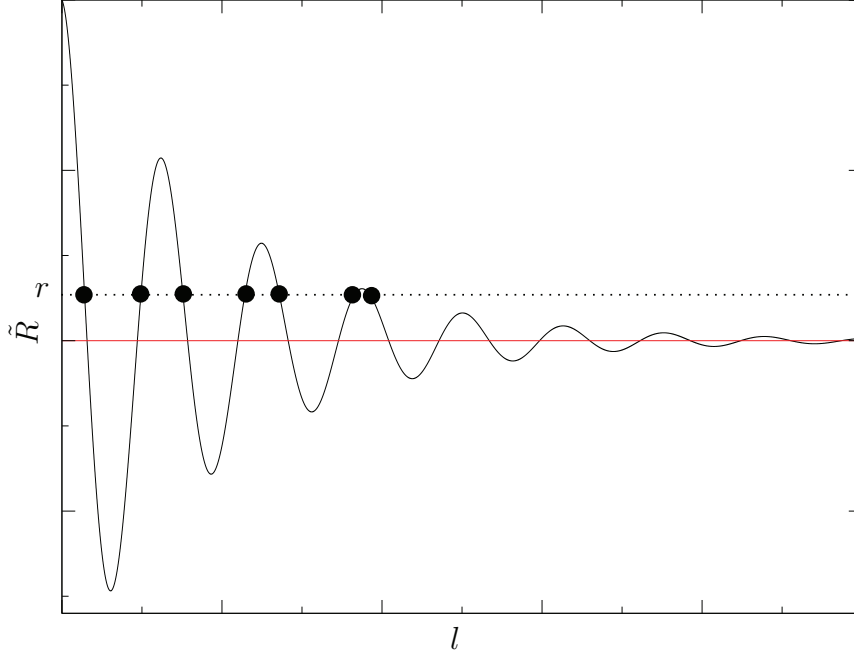


FIGURE 4.5 – Courbe de \tilde{R} en fonction de la longueur l dans le cas d'une interaction oscillante. Pour un r donné, il existe plusieurs longueurs qui vérifient $\tilde{R}(l) = r$.

n , $\tilde{R}_{nc}(l_{n+1/2}^*) = r$. Nous avons donc un état stationnaire que nous allons perturber

$$l_{n+1/2} = l_{n+1/2}^* + \epsilon_{n+1/2}(t), \quad (4.38)$$

qui donne en réinjectant dans l'équation (4.37)

$$\dot{\epsilon}_{n+1/2} = \dot{X}_{n+1} - \dot{X}_n = \tilde{R}'_{nc}(l_{n+3/2}^*)\epsilon_{n+3/2} - 2\tilde{R}'_{nc}(l_{n+1/2}^*)\epsilon_{n+1/2} + \tilde{R}'_{nc}(l_{n-1/2}^*)\epsilon_{n-1/2}. \quad (4.39)$$

Par linéarité, il est possible de choisir $\epsilon_{n+1/2}(t) = A_{n+1/2} \exp(\omega t)$, ce qui donne

$$\omega A_{n+1/2} = \tilde{R}'_{nc}(l_{n+3/2}^*)A_{n+3/2} - 2\tilde{R}'_{nc}(l_{n+1/2}^*)A_{n+1/2} + \tilde{R}'_{nc}(l_{n-1/2}^*)A_{n-1/2}. \quad (4.40)$$

En multipliant l'équation (4.40) par $\tilde{R}'_{nc}(l_{n+1/2}^*)A_{n+1/2}^\dagger$ et en sommant sur tous les n nous obtenons

$$\omega \sum_n \tilde{R}'_{nc}(l_{n+1/2}^*)|A_{n+1/2}|^2 = - \sum_n |\tilde{R}'_{nc}(l_{n+3/2}^*)A_{n+3/2} - \tilde{R}'_{nc}(l_{n+1/2}^*)A_{n+1/2}|^2 \quad (4.41)$$

ce qui permet d'affirmer que (i) ω est réel et (ii) si tous les $\tilde{R}'_{nc}(l_{n+1/2}^*) > 0$ alors $\omega < 0$. Donc tout état stationnaire composé d'une distribution arbitraire de distances telles que $\tilde{R}_{nc}(l_{n+1/2}^*) = r$ et $\tilde{R}'_{nc}(l_{n+1/2}^*) > 0$ pour tous les n est stable.

Nous n'avons pas réussi à démontrer la réciproque dans le cas général mais il est possible le faire dans le cas d'un système "bipériodique" : $l_{n+1/2}^* = l_{n+5/2}^*$. Considérons un état stationnaire avec

$$l_{2n+1/2}^* = l_2, \quad l_{(2n+1)+1/2}^* = l_1. \quad (4.42)$$

4.4. ETUDE DE STABILITÉ DES ÉTATS STATIONNAIRES

L'état étant périodique nous pouvons supposer que

$$A_{2n+1/2} = c_2 \exp(i2nq), \quad A_{(2n+1)+1/2} = c_1 \exp(i(2n+1)q). \quad (4.43)$$

En remplaçant dans l'équation (4.40) il vient le système d'équation suivant

$$\begin{cases} \left(\omega + 2\tilde{R}'_{nc}(l_1) \right) c_1 - 2\tilde{R}'_{nc}(l_2) \cos(q) c_2 = 0, \end{cases} \quad (4.44)$$

$$\begin{cases} -2\tilde{R}'_{nc}(l_1) \cos(q) c_1 + \left(\omega + 2\tilde{R}'_{nc}(l_2) \right) c_2 = 0. \end{cases} \quad (4.45)$$

Pour qu'il existe (c_1, c_2) non nul il faut que le déterminant du système soit nul, ce qui amène à la condition suivante

$$\omega^2 + 2 \left(\tilde{R}'_{nc}(l_1) + \tilde{R}'_{nc}(l_2) \right) \omega + 4\tilde{R}'_{nc}(l_1)\tilde{R}'_{nc}(l_2) \sin^2(q) = 0. \quad (4.46)$$

Il faut imposer que les deux solutions ω_1 et ω_2 soient négatives pour être dans un système stable. Cela veut dire la somme des solutions est négative et que le produit est positif. Or d'après les relations entre les coefficients d'un polynôme et ses racines cela implique forcément que

$$\begin{cases} \tilde{R}'_{nc}(l_1) + \tilde{R}'_{nc}(l_2) > 0, \end{cases} \quad (4.47)$$

$$\begin{cases} \tilde{R}'_{nc}(l_1)\tilde{R}'_{nc}(l_2) > 0, \end{cases} \quad (4.48)$$

donc forcément $\tilde{R}'_{nc}(l_1)$ et $\tilde{R}'_{nc}(l_2)$ sont du même signe et sont positifs. Nous venons donc de démontrer la réciproque dans le cas "bipériodique", c'est-à-dire que si un système stationnaire est stable, alors la dérivée des interactions entre deux kinks successifs séparés de l , $\tilde{R}'_{nc}(l)$, est négative. Pour le moment, nous n'avons pas d'argument analytique pour généraliser ce résultat.

En remarque, rappelons que pour le cas de la membrane avec une rigidité de courbure sans tension de surface

$$\tilde{R}_{nc}(l) = \frac{2U''_m A^2}{\int dX (\partial_X H^0)^2} \cos(\Omega l + 2\alpha) \exp(-\Omega l). \quad (4.49)$$

La condition $\tilde{R}'_{nc}(l) > 0$ est identique à la condition de stabilité pour les états périodiques trouvée dans la sous-section 3.3.2 : $\partial_\lambda \mathcal{L}_\lambda > 0$ avec la fonction \mathcal{L}_λ donné par l'équation (3.35).

Pour conclure, nous avons développé un modèle de kink amélioré et montré que les interactions entre les kinks sont en $R^2(l/2)$ et non en $R(l)$ comme pour le modèle de Kawasaki et Ohta. Ceci modifie la forme des interactions lorsque celles-ci sont oscillantes. Cependant cette approche a des limitations. En effet, ces modèles ne restent valables que dans la limite des kinks éloignés, ce qui n'est pas toujours le cas pour la dynamique de l'équation complète. Notamment puisque le mûrissement est arrêté en présence d'interactions oscillantes, la limite des grandes distances entre les kinks n'est plus justifiée par le comportement asymptotique à temps long. Cependant, ces modèles permettent de simuler rapidement les dynamiques de TDGL(4) et CH(4), nous avons gagné un facteur 10^4 par rapport aux méthodes explicites en différence finie. Enfin, cela nous a permis d'explorer un peu plus loin la stabilité des états stationnaires.

Chapitre 5

Robustesse des états gelés et transition vers le mûrissement

Nous venons de voir dans le chapitre précédent qu’une membrane avec une rigidité de courbure a une dynamique gelée. Nous allons tester maintenant la robustesse de ces états gelés en ajoutant plusieurs ingrédients. Nous commencerons par étudier l’effet d’une tension de surface sur la membrane. Les observations expérimentales permettent d’estimer que les membranes lipidiques ont une tension de surface qui peut varier de 10^{-5} à 10^{-3} J.m $^{-2}$ [36, 61, 94]. Ensuite, nous reconsidérerons une membrane sans tension de surface en introduisant un potentiel d’interaction asymétrique. En effet, dans les systèmes biologiques, les deux substrats peuvent être différents. De plus, les systèmes expérimentaux de vésicules adhérant sur un substrat avec un coussin de polymères simulant le glycocalyx montrent un potentiel asymétrique [59, 89]. Enfin, nous rajouterons du bruit à notre système. Ce bruit peut être d’origine thermique mais peut aussi modéliser l’activité biologique environnante. Dans tous les cas le mûrissement pourra être restauré, en général au-dessus d’un seuil fini. Cette compétition entre du mûrissement et des états gelés est très largement abordée dans la référence [70].

5.1 Influence de la tension ς de la membrane

Commençons par étudier l’effet de la compétition entre la tension de surface et la rigidité de courbure. La tension de surface pour les membranes biologiques varie de 10^{-5} à 10^{-3} J.m $^{-2}$ comme mentionné ci-dessus. Cette tension, dont la nature est encore débattue [29, 30], pourrait être par exemple d’origine thermique comme proposé par E. Evans et W. Rawicz [28] ou mécanique selon F. Schmid [87]. Nous verrons dans cette section qu’une tension critique, au-dessus de laquelle le mûrissement est restauré, apparaît. Cette valeur sera discuté plus loin. Le système étudié est représenté sur la figure 5.1. L’énergie de la membrane est désormais

$$\mathcal{E}_{mem} = \int dx \left[\frac{\kappa}{2} (\partial_{xx} h)^2 + \frac{\varsigma}{2} (\partial_x h)^2 + \mathcal{U}(h) \right]. \quad (5.1)$$

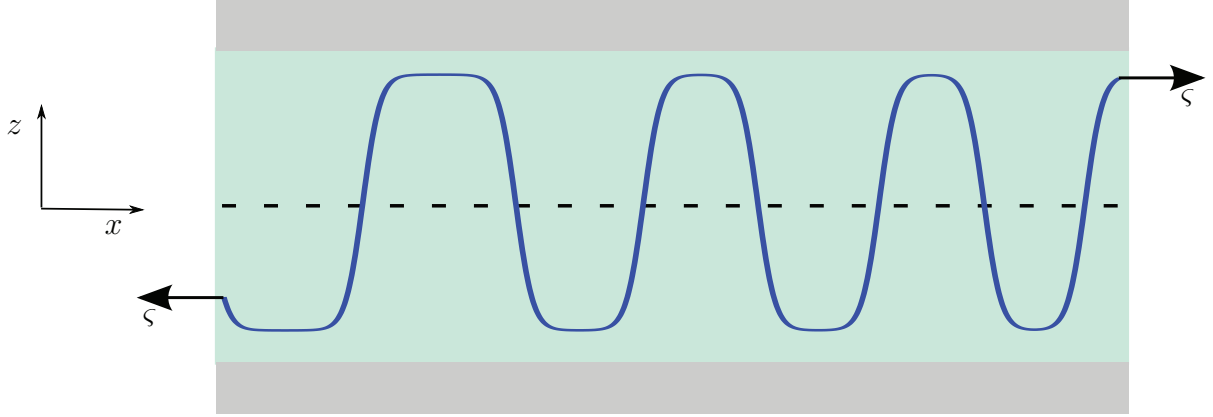


FIGURE 5.1 – Schéma du système auquel nous avons rajouté la tension ς .

où ς est la tension de la membrane. En variables normalisées cela donne

$$E_{mem} = \int dX \left[\frac{1}{2}(\partial_{XX}H)^2 + \frac{\sigma}{2}(\partial_X H)^2 + U(H) \right], \quad (5.2)$$

avec $\sigma = [h_0/(\kappa^{1/2}\mathcal{U}_0^{1/2})]\varsigma$. La tension rajoute un terme à la force normale

$$F_n = -\partial_X^4 H + \sigma \partial_{XX} H - U'(H). \quad (5.3)$$

Les nouvelles équations d'évolution sont donc

$$\partial_T H = -\partial_X^4 H + \sigma \partial_{XX} H - U'(H), \quad (5.4)$$

$$\partial_T H = -\partial_{XX} (-\partial_X^4 H + \sigma \partial_{XX} H - U'(H)), \quad (5.5)$$

pour les cas non-conservé et conservé respectivement. Le terme de mobilité M est pris constant ici.

Nous pouvons noter la similitude avec l'équation de Swift-Hohenberg [96]

$$\partial_T H = -(1 + \partial_{XX})^2 H + rH - H^3, \quad (5.6)$$

avec r un paramètre. Cette équation a été utilisée par de nombreux auteurs pour modéliser la formation de motifs dans les fluides, comme pour la convection de Rayleigh-Bénard par exemple. Les solutions en kinks de cette équation ont également une queue oscillante. De plus, la dynamique fait aussi apparaître une longueur d'onde gelée. Cependant le terme de tension en $\partial_{XX} H$ qui est stabilisant pour notre problème est déstabilisant pour l'équation de Swift-Hohenberg ce qui mène à une relation de dispersion qualitativement différente. Pour Swift-Hohenberg, les longueurs d'ondes instables sont comprises dans un intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ avec $\lambda_1 > 0$ et λ_2 fini. Le comportement est de type passe-bande. Pour notre problème, $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 = \infty$, le comportement est de type passe-haut.

5.1.1 Tension critique

Dans la limite $\sigma = 0$ il n'y a pas de mûrissement dans la dynamique de la membrane et les queues des kinks sont oscillantes. A contrario, pour une membrane sans rigidité

5.1. INFLUENCE DE LA TENSION ς DE LA MEMBRANE

de courbure mais avec une tension de surface, la dynamique est du mûrissement et les queues des kinks n'ont pas d'oscillations. Nous allons montrer qu'il y a une valeur de tension critique σ_c à partir de laquelle les oscillations des queues des kinks disparaissent.

Pour confirmer cela nous étudions les états stationnaires qui vérifient

$$0 = \partial_X^4 H - \sigma \partial_{XX} H + U'(H). \quad (5.7)$$

Considérons alors un kink isolé et cherchons la queue en $+\infty$ sous la forme $H = H_m + R(X)$, nous pouvons écrire que

$$0 = \partial_X^4 R(X) - \sigma \partial_{XX} R(X) + U_m'' R(X). \quad (5.8)$$

Nous rappelons que U_m'' est la dérivée seconde du potentiel en $H = \pm H_m$. Supposons que $R(X) \propto \exp(\gamma X)$, nous obtenons alors

$$\gamma^4 - \sigma \gamma^2 + U_m'' = 0, \quad (5.9)$$

qui est une équation du second degré en γ^2 . Le discriminant de cette équation vaut $\sigma^2 - 4U_m''$. Si ce discriminant est positif, alors γ sera réel et la queue du kink $R(X)$ n'aura pas d'oscillations. Si en revanche, il est négatif alors γ sera imaginaire et la queue sera oscillante. Il apparaît alors une tension critique

$$\sigma_c = (4U_m'')^{1/2}, \quad (5.10)$$

qui sépare la zone des kinks à queue oscillante et celle des kinks à profil monotone. Il sera vu par la suite que ces zones correspondent également à une zone où la dynamique est gelée et une zone de mûrissement respectivement. L'expression en variable physique de la tension critique est

$$\varsigma_c = (4\kappa \mathcal{U}_m'')^{1/2}, \quad (5.11)$$

cette tension apparaît également dans l'article de J.O. Rädler et al [80].

En reprenant le potentiel utilisé dans l'article de P.S. Swain et D. Andelman [94], nous trouvons une tension critique ς_c de l'ordre de 10^{-3} - 10^{-2} J.m⁻². Les tensions mesurées dans les expériences sont de l'ordre de 10^{-5} - 10^{-3} J.m⁻² [36, 61, 94]. Ces systèmes se situent donc sous la tension critique et la tension n'est donc en général pas assez forte pour restaurer le mûrissement.

5.1.2 Etats stationnaires avec tension

Etudions un peu plus en détail ces états stationnaires. Premièrement, plaçons-nous dans la zone $\sigma < \sigma_c$. Les solutions de (5.9) vérifient donc

$$\gamma^2 = \frac{1}{2} [\sigma \pm i(\sigma_c^2 - \sigma^2)^{1/2}]. \quad (5.12)$$

Après calcul nous obtenons

$$\gamma = -\frac{1}{2}(\sigma + \sigma_c)^{1/2} \pm \frac{i}{2}(\sigma_c - \sigma)^{1/2}. \quad (5.13)$$

CHAPITRE 5. ROBUSTESSE DES ÉTATS GELÉS ET TRANSITION VERS LE MÛRISSEMENT

Finalement, l'expression de la queue du kink se met sous la forme

$$R(X) = A \cos \left[\frac{1}{2}(\sigma_c - \sigma)^{1/2} X + \alpha \right] \exp \left[-\frac{1}{2}(\sigma + \sigma_c)^{1/2} X \right], \quad (5.14)$$

qui redonne bien l'expression (3.28) dans la limite $\sigma = 0$ et le fait qu'il y a des queues oscillantes pour $\sigma < \sigma_c$.

Considérons maintenant le cas où $\sigma > \sigma_c$. Cette fois-ci, les solutions γ^2 de l'équation (5.9) seront réelles et positives, elles s'expriment sous la forme

$$\gamma^2 = \frac{1}{2} [\sigma \pm (\sigma^2 - \sigma_c^2)^{1/2}]. \quad (5.15)$$

Seules les deux solutions de γ négatives sont conservées pour éviter la divergence en $+\infty$

$$\gamma_{\pm} = - \left[\frac{\sigma}{2} \pm \frac{(\sigma^2 - \sigma_c^2)^{1/2}}{2} \right]^{1/2}. \quad (5.16)$$

La queue des kinks est donc de la forme

$$R(X) = A_+ \exp(\gamma_+ X) + A_- \exp(\gamma_- X). \quad (5.17)$$

Les 2 longueurs $(-\gamma_+)^{-1}$ et $(-\gamma_-)^{-1}$ associées à ces décroissances exponentielles sont très différentes pour les grandes tension : $(-\gamma_-)^{-1} \gg (-\gamma_+)^{-1}$ si $\sigma \gg \sigma_c$. Dans ce cas, la contribution $\exp(\gamma_+ X)$ peut être négligée et la contribution dominante à grande distance pour la queue d'un kink sera en $\exp(\gamma_- X)$. Cependant, quand $\sigma \rightarrow \sigma_c$, nous avons $(-\gamma_+)^{-1} \rightarrow (-\gamma_-)^{-1} \approx (\sigma_c/2)^{1/2}$. Dans cette limite, les deux contributions sont du même ordre et il n'est pas a priori justifié de ne garder que l'un des deux termes. Définissons le rapport

$$\frac{\exp(\gamma_+ X)}{\exp(\gamma_- X)} = \exp(-X/X_c) \quad (5.18)$$

avec $X_c = -(\gamma_+ - \gamma_-)^{-1}$. X_c tend vers $+\infty$ si la tension tend vers σ_c . Plus précisément, lorsque la distance typique entre les kinks sera plus grande que X_c , la contribution en $\exp(\gamma_+ X)$ sera négligeable. Cependant X_c diverge quand la tension s'approche du seuil σ_c .

5.1.3 Transition vers le mûrissement

Décrivons maintenant la dynamique d'une membrane avec une tension de surface et commençons par le cas non-conservé (murs très perméables). L'expression $R(X)$ des queues des kinks des états stationnaires d'une membrane avec une tension de surface est désormais connue. Nous savons depuis le chapitre 4 que l'interaction effective $\tilde{R}(l)$ entre deux kinks séparés de l peut en être déduite, elle s'exprime de la manière suivante

$$\tilde{R}_{nc}(l) = 2 \left[U_m'' R^2 \left(\frac{l}{2} \right) - R''^2 \left(\frac{l}{2} \right) \right]. \quad (5.19)$$

5.1. INFLUENCE DE LA TENSION ς DE LA MEMBRANE

Nous voyons que si R est une fonction oscillante alors l'interaction \tilde{R}_{nc} le sera aussi. De la même manière, si la queue des kinks décroît exponentiellement alors l'interaction entre les kinks aussi. La vitesse du n -ième kink est donnée par

$$\dot{X}_n = \tilde{R}_{nc}(l_{n+1/2}) - \tilde{R}_{nc}(l_{n-1/2}). \quad (5.20)$$

D'après l'étude de stabilité des états stationnaires (voir section 4.4), nous nous attendons à ce que la dynamique soit gelée dans le cas où \tilde{R}_{nc} est une fonction oscillante ($\sigma < \sigma_c$). De la même manière que pour le cas d'une membrane sans tension, les interactions entre les kinks sont successivement répulsives et attractives en fonction de la distance. Le système va tendre vers un état d'équilibre où toutes les interactions se compensent. Dans le cas où $\sigma > \sigma_c$ en revanche, les interactions sont toujours attractives. Le seul état stationnaire est celui de kinks équidistants et nous savons que cet état est instable, il y aura alors du mûrissement.

Pour le cas non-conservé, ces prédictions sont confirmées par les résultats des simulations de l'équation complète (5.4) en figure 5.2. Les simulations ont été réalisées par différence finie avec des conditions initiales aléatoires. Le potentiel choisi est toujours le même ($U(H) = H^4/4 - H_m^2 H^2/2$ avec $H_m=0.9$), et la tension critique vaut $\sigma_c = (8H_m^2)^{1/2} \approx 2.55$. Nous avons choisi de simuler la membrane avec une tension $\sigma = 2$ sous la valeur critique et avec une tension $\sigma = 3$ au-dessus de la tension critique. En (a) nous voyons que pour $\sigma = 2$ la longueur d'onde moyenne de la membrane sature rapidement à une constante, la dynamique est gelée. Pour $\sigma = 3$ la longueur d'onde croît sans s'arrêter, le mûrissement est restauré. Les trajectoires des kinks en fonction du temps obtenues par la solution numérique de l'équation (5.4) pour les simulations correspondantes sont en (b) et en (c).

Pour le cas conservé, l'équation régissant la dynamique des kinks est plus complexe. Cependant, le raisonnement qualitatif reste le même. Les interactions effectives seront oscillantes pour des tensions sous la valeur critique et elles seront exponentielles dans le cas contraire. Il est donc naturel de s'attendre à du mûrissement pour des grandes tensions et à une dynamique gelée pour des faibles tensions. Ceci est en accord avec les résultats de simulations représentés sur la figure 5.3. Les simulations étant trop longues pour une intégration des équations complètes, nous avons prolongé la dynamique en utilisant le modèle de kinks développé dans la section 4.2 en ne gardant que la contribution en $\exp(\gamma_- X)$ pour $\sigma = 3$ (dans ce cas la longueur X_c vaut 1,48 et la longueur d'onde moyenne est de l'ordre de 40 lorsque le modèle de kinks est utilisé, l'approximation est justifié). Nous pouvons remarquer que contrairement au cas non-conservé, les événements de mûrissement (fusion de domaines) font intervenir trois kinks et non deux. Cela vient de la conservation de la hauteur moyenne de la membrane. Il faut en effet la disparition de deux domaines voisins simultanément (un en $+H_m$ et un autre en $-H_m$) pour pouvoir annihiler des kinks tout en conservant la hauteur moyenne.

Sur la figure 5.3 nous voyons que pour les temps courts il existe tout de même des événements de mûrissement même pour des tensions inférieures à σ_c . En reprenant le calcul de la sous-section 3.3.2 pour l'énergie

$$E_{mem} = \int dX \left[\frac{1}{2}(\partial_{XX}H)^2 + \frac{\sigma}{2}(\partial_X H)^2 + U(H) \right], \quad (5.21)$$

le terme \mathcal{L}_λ du critère de stabilité d'un état périodique stationnaire $\partial_\lambda \mathcal{L}_\lambda > 0$ devient

CHAPITRE 5. ROBUSTESSE DES ÉTATS GELÉS ET TRANSITION VERS LE MÛRISSEMENT

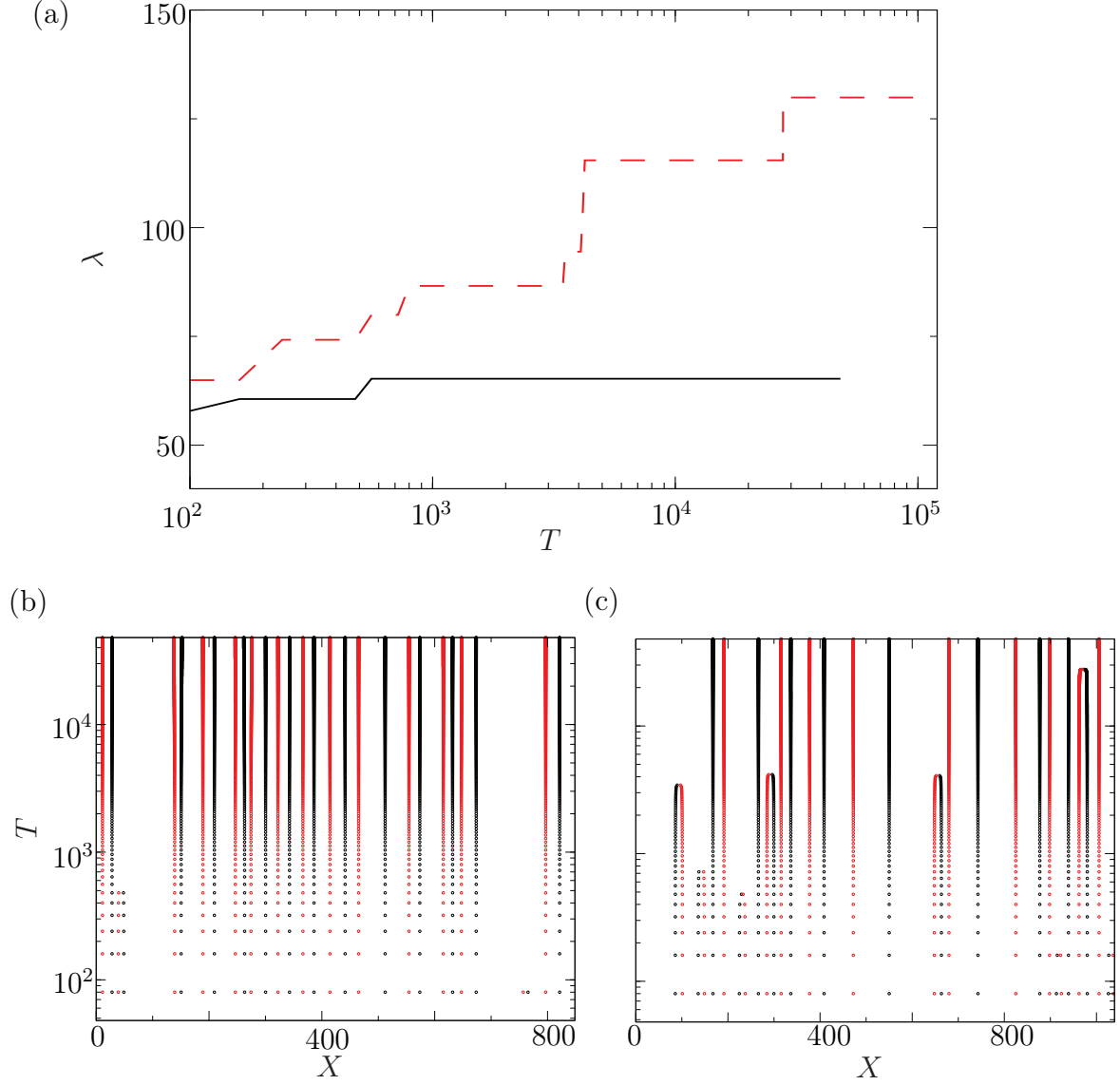


FIGURE 5.2 – Résultats de simulations du cas non-conservé avec tension et $U(H) = H^4/4 - H_m^2 H^2/2$ où $H_m = 0,9$. (a) Evolution de la longueur d'onde moyenne λ en fonction du temps pour le cas non-conservé avec tension. En noir, la courbe pour $\sigma = 2 < \sigma_c$ et en pointillé rouge, la courbe pour $\sigma = 3 > \sigma_c$. (b) Trajectoires des zéros (kinks) de la membrane en fonction du temps pour $\sigma = 2$. Les points noirs représentent les kinks et les points rouges les antikinks. (c) Trajectoires des kinks pour $\sigma = 3$.

5.1. INFLUENCE DE LA TENSION ς DE LA MEMBRANE

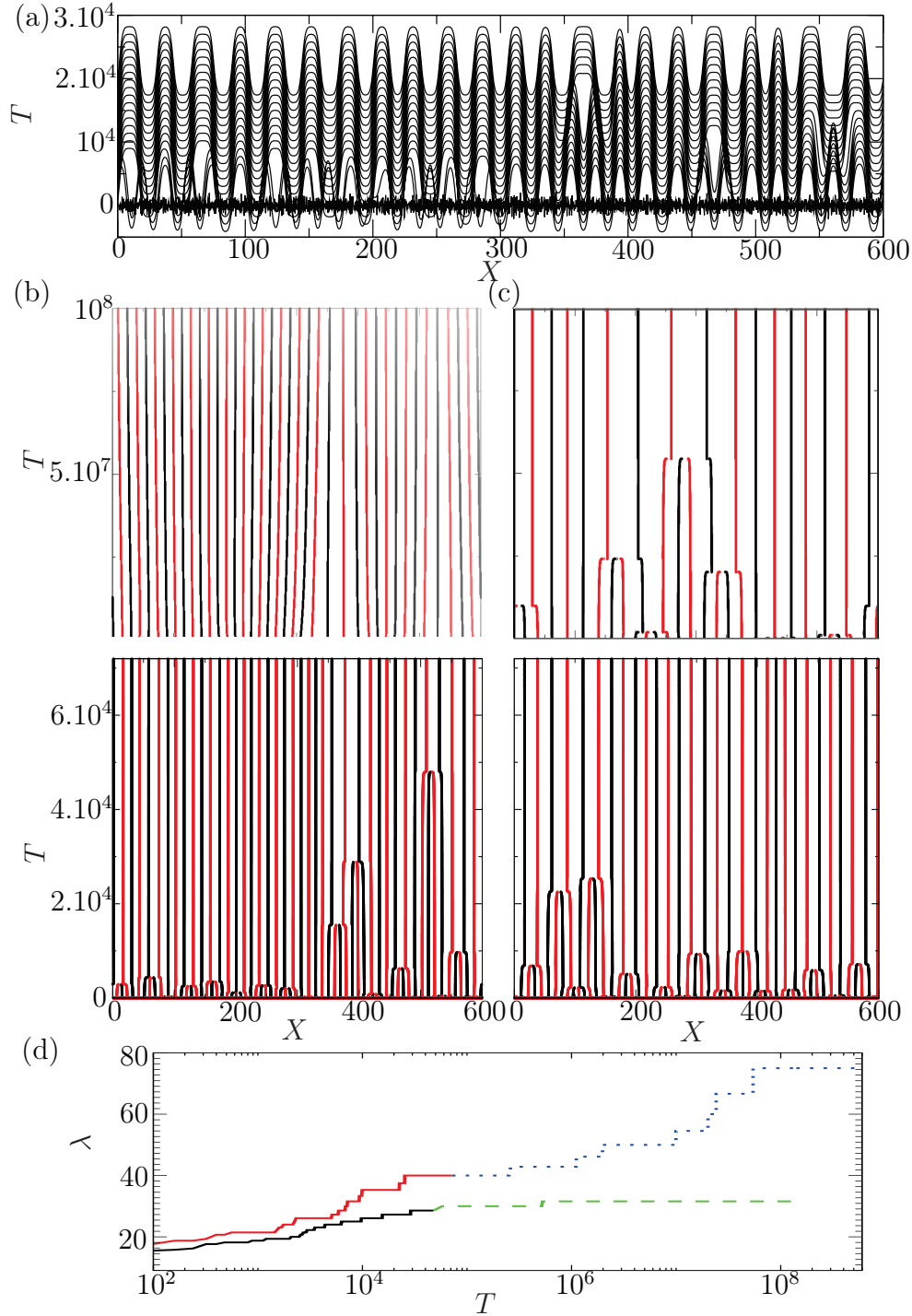


FIGURE 5.3 – Résultats de simulations pour le cas conservé avec tension et $U(H) = H^4/4 - H_m^2 H^2/2$ où $H_m = 0,9$. (a) Profil de la membrane translatée avec le temps pour $\sigma = 2$. (b) Trajectoires des kinks en fonction du temps pour $\sigma = 2$, les points noirs sont les kinks et les points rouges les antikinks. En bas, la simulation de l'équation complète et en haut, la suite en utilisant le modèle de kink. (c) Idem pour $\sigma = 3$. (d) Evolution de la longueur d'onde moyenne en fonction du temps pour les simulations représentées en (b) et (c). La courbe noir représente la dynamique complète pour $\sigma = 2$ et les pointillés verts la suite avec le modèle de kink. En rouge, la dynamique complète pour $\sigma = 3$ et la suite en pointillé bleu avec le modèle de kink.

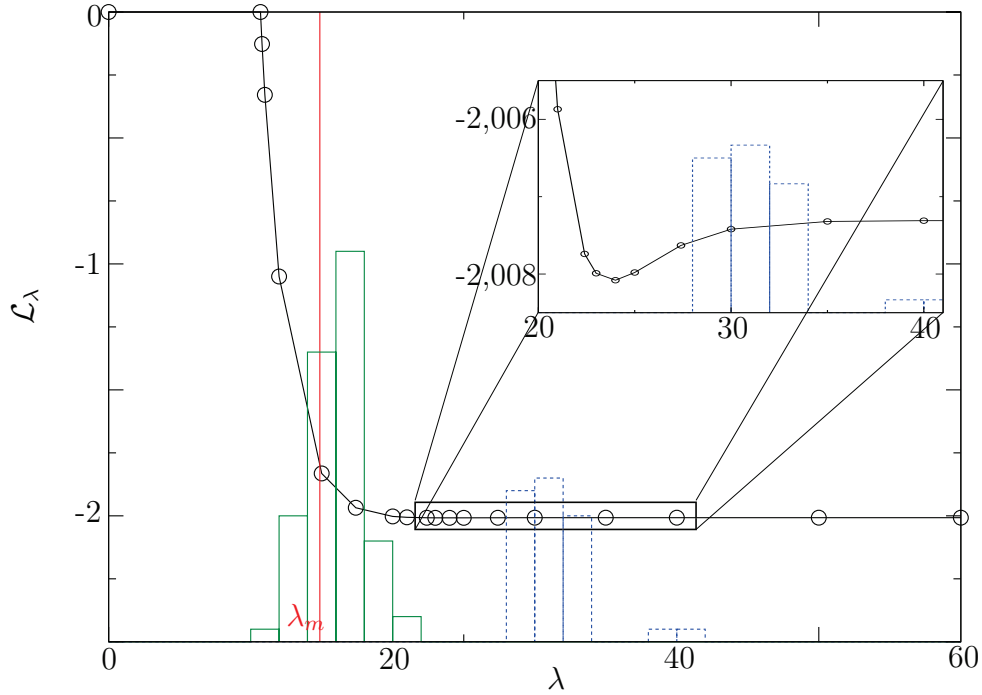


FIGURE 5.4 – \mathcal{L}_λ obtenu numériquement en fonction de la longueur d’onde pour le cas d’une membrane avec une tension $\sigma = 2$ et pour le potentiel $U(H) = H^4/4 - H_m^2 H^2/2$ avec $H_m = 0,9$. En ligne verte, la distribution des longueurs d’onde au temps initial pour le cas conservé avec $\sigma = 2$. En pointillé bleu, la distribution des longueurs d’onde aux temps longs. La ligne rouge repère la longueur d’onde la plus instable linéairement λ_m .

(voir appendice C.2)

$$\mathcal{L}_\lambda = - \int_0^\lambda dX \left[(\partial_{XX} H)^2 + \frac{1}{2} \sigma (\partial_X H)^2 \right]. \quad (5.22)$$

La grandeur \mathcal{L}_λ a été tracée à partir des états stationnaires périodiques de hauteur moyenne \bar{H} nulle avec deux zéros. Ces états stationnaires ont été obtenus numériquement, la courbe est visible sur la figure 5.4. En reprenant l’étude de stabilité linéaire de la sous-section 3.2.1 nous savons que la relation de dispersion pour le cas conservé a un maximum λ_m . Dans la dynamique initiale, les perturbations de longueurs d’onde proches de λ_m croient exponentiellement plus vite que les autres modes instables et il apparaît une distribution de longueurs d’ondes centrée en λ_m . Nous l’avons vérifié en traçant la distribution des longueurs d’onde initiales pour $\sigma = 2$ (figure 5.4). Nous obtenons un pic autour de λ_m . Or, ce pic se trouve dans une zone où $\partial_\lambda \mathcal{L}_\lambda < 0$, le système sera alors instable, d’où les événements de mûrissement à temps courts. Cette instabilité détruit l’ordre à grande distance observé en l’absence de tension. Cependant, après quelques réarrangements, la dynamique à temps long est à nouveau gelée.

5.2. POTENTIEL ASYMÉTRIQUE

5.2 Potentiel asymétrique

Nous venons de voir que pour des tensions de surface suffisamment élevées, nous pouvions retrouver du mûrissement. Dans cette section nous allons étudier l'influence d'un autre paramètre, l'asymétrie du potentiel. Jusqu'à maintenant le potentiel considéré était parfaitement symétrique, mais dans les systèmes biologiques les membranes lipidiques peuvent être confrontées à des potentiels différents. L'environnement créant le potentiel d'adhésion double puits n'a aucune raison d'être symétrique. Par exemple, des expériences voulant reproduire l'effet du glycocalyx (sorte de manteau entourant certaines cellules) sur l'adhésion des cellules mettent en évidence un potentiel asymétrique [12, 89]. Dans ces deux articles, l'adhésion d'une vésicule sur un substrat sur lequel un coussin de polymère est posé pour simuler le glycocalyx est étudiée. Le détail des ingrédients physiques qui donnent lieu à ces potentiels sont discutés dans la sous-section 1.4.4. Le fait d'être attiré par un puit plus que par l'autre pourrait rendre fortement instable les domaines d'adhésion dans le puit de plus haute énergie.

Pour prendre en compte cette asymétrie nous allons simplement rajouter un terme linéaire en H à notre potentiel utilisé jusqu'à maintenant de la manière suivante

$$U_{asym}(H) = U(H) + \beta H = \frac{H^4}{4} - H_m^2 \frac{H^2}{2} + \beta H, \quad (5.23)$$

où β est une constante. La membrane considérée est de nouveau sans tension de surface afin de se concentrer sur l'effet de l'asymétrie. Ce nouveau potentiel rajoute un terme constant aux force normales

$$F_n = -\partial_X^4 H - U'(H) - \beta. \quad (5.24)$$

De fait, l'asymétrie n'aura aucune influence dans le cas conservé car la force normale y est dérivée et donc la constante va disparaître. Donc seul le cas non-conservé régit par l'équation

$$\partial_T H = -\partial_X^4 H - U'(H) - \beta \quad (5.25)$$

sera étudié.

5.2.1 Dynamique d'une membrane dans un potentiel asymétrique

Plusieurs situations vont se présenter à nous. Tout d'abord, pour $|\beta| > \beta_0 = 2H_m^3/3^{3/2} \approx 0,281$ ($H_m = 0,9$), le potentiel n'a qu'un minimum, donc un seul état d'adhésion possible. La membrane va donc relaxer vers un état final plan dans le seul minimum du potentiel.

Une deuxième limite est apparue dans les simulations, même lorsque nous avons bien deux minimums pour le potentiel, les domaines d'adhésion dans le puit de plus haute énergie sont systématiquement annihilés pour $|\beta| > \beta_c \approx 0,041 \approx 0,056H_m^3$ pour $H_m = 0,9$. Les potentiels avec β_c et β_0 sont représentés sur la figure 5.5 en (a). Sur cette même figure est représentée l'évolution de la membrane en fonction du temps pour une valeur de β supérieure à β_c (mais inférieure à β_0) en (b) et pour une valeur inférieure à β_c en (c). Nous voyons qu'en (b) la totalité de la membrane finit par se retrouver dans le minimum du potentiel, tous les kinks s'annihilent. Au contraire en (c), des domaines d'adhésion

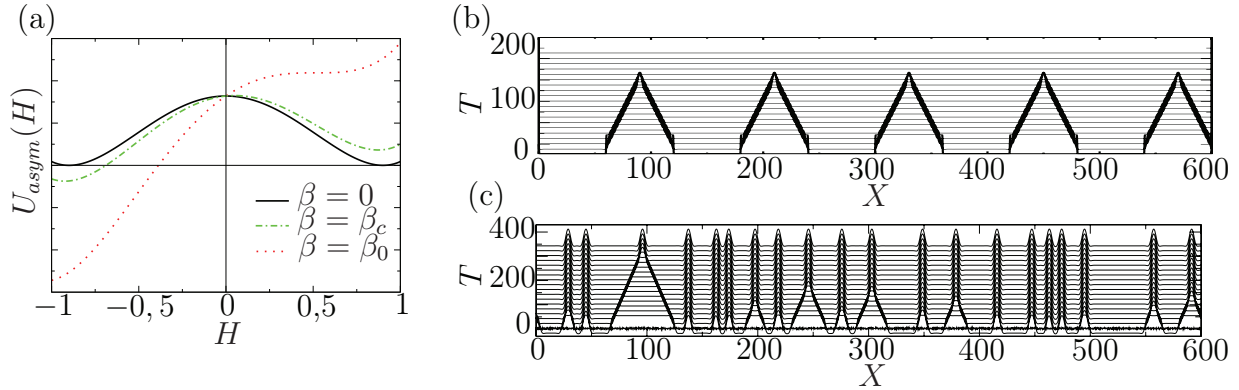


FIGURE 5.5 – (a) Potentiel en fonction de la hauteur pour les cas limites avec $H_m = 0, 9$. (b) Evolution du profil de la membrane translaté avec le temps pour $\beta = 0, 1$, une valeur qui se situe entre β_0 et β_c . (c) Evolution de la membrane pour $\beta = 0, 04 < \beta_c$.

subsistent dans le minimum de plus haute énergie, l'asymétrie n'est pas suffisamment forte pour les faire disparaître.

Revenons aux expériences qui cherchent à étudier l'effet du glycocalyx sur l'adhésion des cellules [12, 89] où des potentiels asymétriques sont obtenus. Leur potentiel n'a pas une forme aussi simple que le nôtre. Cependant, il est possible de définir un paramètre sans dimension qui quantifie l'asymétrie

$$b = \frac{U_{asym}(H_{m+}) - U_{asym}(H_{m-})}{U_{asym}(H_M) - [U_{asym}(H_{m+}) + U_{asym}(H_{m-})]/2} \quad (5.26)$$

où H_M définit la position du maximum local, H_{m-} la position du minimum de plus faible énergie et H_{m+} l'autre minimum. En reprenant notre forme analytique de l'équation (5.23), nous pouvons dire que pour les faibles asymétries $b \approx 8\beta/H_m^3$. En utilisant $\beta_c \approx 0,056H_m^3$, nous obtenons un paramètre d'asymétrie critique $b_c \approx 0.45$ au delà duquel les domaines d'adhésion disparaissent. En reprenant le potentiel de R. Bruinsma, A. Behrisch et E. Sackmann [12] nous calculons $b \approx 0.3$ qui est inférieur à la valeur critique. Pour l'expérience de K. Sengupta et L. Limozin [89] la valeur calculée est $b \approx 1.5$ qui est supérieure à b_c . Cela suggère que les deux situations pourraient être rencontrées dans des situations expérimentales et qu'il est peut-être possible d'observer une transition en faisant varier les paramètres physiques.

Il existe d'autres effets de l'asymétrie que nous ne prenons pas en compte ici. En particulier, les valeurs de la dérivée seconde du potentiel aux minimums U_m'' peuvent être différentes dans les deux puits. Cela implique des oscillations de longueurs d'onde différentes pour les profils de kinks. Cependant, nous n'attendons pas de changement qualitatif important dans ce cas.

5.2.2 Vitesse de déplacement des kinks

Intéressons nous maintenant à la vitesse de déplacement des kinks. Il est visible sur la figure 5.5 en (b) et (c) que tous les kinks semblent se déplacer à une même vitesse, ceci est une observation générale de nos simulations. A une valeur de β correspond une valeur

5.2. POTENTIEL ASYMÉTRIQUE

V_k de la vitesse des kinks. Les vitesses mesurées numériquement pour l'équation complète ont été tracées sur la figure 5.6, ce sont les points noirs. Cette vitesse semble linéaire en β .

Plaçons nous dans la limite des faibles asymétries ($\beta \ll 1$). Considérons un kink isolé sur une membrane infinie. Supposons que la vitesse de ce kink V_k est bien une fonction de β et que le kink se déplace à profil conservé. A β fixé, nous pouvons écrire que

$$\partial_T H = -V_k \partial_X H. \quad (5.27)$$

En multipliant l'équation (5.25) par $\partial_X H$ et en intégrant de $-\infty$ à $+\infty$ nous obtenons

$$V_k = \frac{\Delta H}{\int_{-\infty}^{+\infty} dX (\partial_X H)^2} \beta, \quad (5.28)$$

car les dérivées de H sont nulles en $\pm\infty$ et que H est une fonction impaire pour β faible. ΔH est la distance entre les deux minimums du potentiel. Pour les faibles asymétries $\Delta H \approx 2H_m$ et $H \approx H^0$ le profil du kink stationnaire (voir section 4.1). Numériquement il est possible d'obtenir H^0 à $\beta = 0$, ce qui permet de calculer le préfacteur de l'équation (5.28). Nous pouvons ensuite affirmer que dans la limite des faibles asymétries et pour $H_m = 0,9$

$$V_k \approx 2,36\beta. \quad (5.29)$$

V_k est représenté par la droite rouge sur la figure 5.6. Le problème étant symétrique avec β , la courbe n'est tracée que pour les valeurs positives. Nous voyons que cette courbe représente bien le comportement pour les petits β . Pour les grandes asymétries ce n'est plus le déplacement des kinks qui domine la dynamique, il y a déplacement global de la membrane vers le puit le plus bas. Le calcul fait ci-dessus n'est plus valide.

5.2.3 Tailles d'équilibre des domaines d'adhésion

Une autre observation que nous avons effectuée est que la taille finale des domaines d'adhésion dans le puits le plus haut semble également être une fonction de β . Ceci peut se voir sur la figure 5.5 en (c) où il n'y a qu'une seule taille pour les domaines d'adhésion dans le puits le plus haut. Pour un β donné, il peut en fait y avoir une ou plusieurs valeurs discrètes de longueur l de domaine à condition que $|\beta| < \beta_c$. l est la distance entre deux zéros successifs. Plus β est petit et plus le nombre de tailles l possibles est élevé. Les points sur la figure 5.7 correspondent aux tailles des domaines obtenus numériquement. Pour les β positifs, nous avons pris comme conditions initiales un sin ou un tanh(sin) puis nous avons laissé le système se relaxer. Pour les β négatifs les conditions initiales prises sont l'état final d'un β positif. Les états stationnaires sont plus difficiles à obtenir car la grande partie de la membrane se situe dans le puits de plus haute énergie.

Plusieurs branches sont observées et elles sont représentées par les lignes sur la figure 5.7. Ces branches s'arrêtent pour des valeurs finies de β . Pour comprendre cela, reprenons le modèle de kink de la section 4.2. Nous nous plaçons dans le cas où β est petit, ce qui est vérifié sur les branches puisque $|\beta| < \beta_c \approx 0,041$ pour $H_m = 0,9$. En reprenant le calcul avec le terme en β supplémentaire, cela donne pour le n -ième kink

$$\dot{X}_n = \tilde{R}_{nc}(l_{n+1/2}) - \tilde{R}_{nc}(l_{n-1/2}) + \frac{(-1)^n \Delta H}{\int_{-\infty}^{+\infty} dX (\partial_X H^0)^2} \beta \quad (5.30)$$

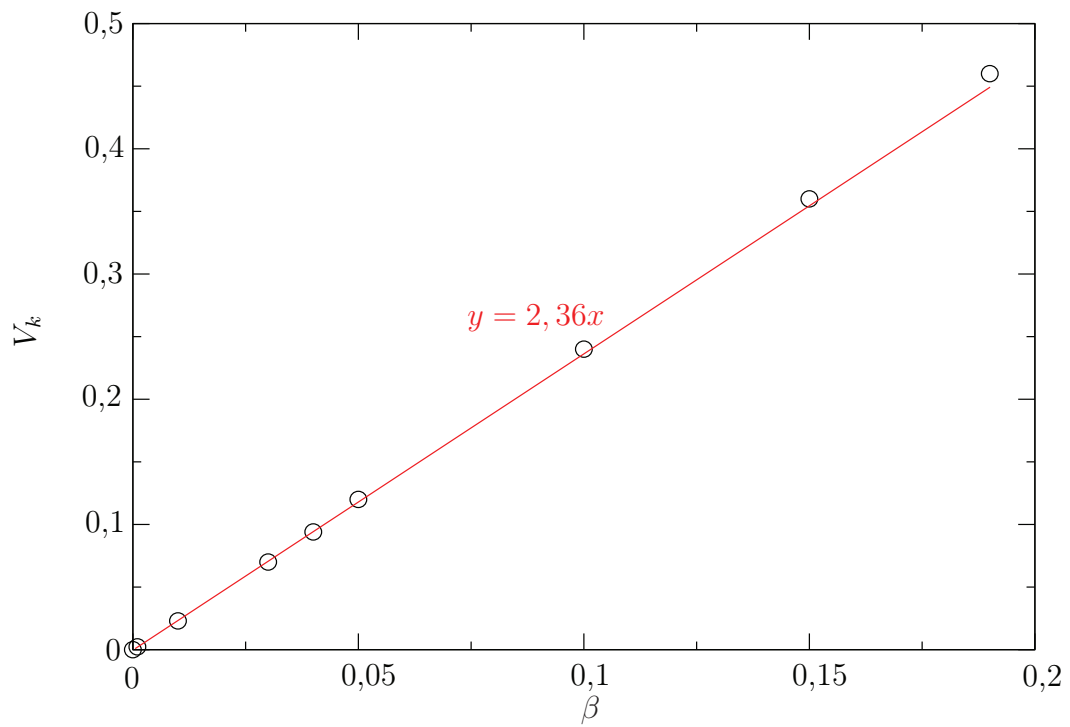


FIGURE 5.6 – Vitesse des kinks V_k en fonction de l'asymétrie β . Les points sont obtenus numériquement pour $H_m = 0,9$ et la droite rouge est la prédiction pour les faibles valeurs de β .

5.3. BRUIT THERMIQUE

avec

$$\tilde{R}_{nc}(l) = \frac{2U_m'' A^2}{\int dX (\partial_X H^0)^2} \cos(\Omega l + 2\alpha) \exp(-\Omega l), \quad (5.31)$$

si les n pairs correspondent à des kinks et les n impairs à des antikinks. Nous rappelons que H^0 est le profil d'un kink isolé et que ΔH est la distance entre les deux minimums du potentiel. Nous considérons ici que $\Delta H \approx 2H_m$ et que le profil des queues des kinks est celui où $\beta = 0$ car l'asymétrie est faible.

Pour un domaine d'adhésion isolé de taille l centré en $X = 0$, c'est-à-dire un kink en $X_1 = -l/2$ et un antikink en $X_2 = l/2$, l'état stationnaire, $\partial_T l = 0$, vérifie d'après (5.30)

$$\beta = -\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dX (\partial_X H^0)^2}{\Delta H} \tilde{R}_{nc}(l). \quad (5.32)$$

La courbe est tracée sur la figure 5.7, et elle donne les mêmes valeurs que les points obtenus par simulation. Etudions maintenant la stabilité de cet état stationnaire. Nous avons deux kinks séparés par la distance d'équilibre l et nous la perturbons par $\delta l = \exp(\omega T)$, cela donne

$$\omega = -2\tilde{R}'_{nc}(l). \quad (5.33)$$

L'état stationnaire considéré sera stable si $\omega < 0$ et donc si $\tilde{R}'_{nc}(l) > 0$, ce qui correspond à $\partial_l \beta < 0$, et instable dans le cas contraire. Les branches d'états stables sont représentées par les courbes pleines et les états instables par les pointillés sur la figure 5.7.

Ce résultat valide un peu plus le modèle de kinks présenté dans la section 4.2 car il prédit très précisément les résultats des simulations. De plus, l'échelle logarithmique sur la figure 5.7 met en évidence la décroissance exponentielle des oscillations.

5.3 Bruit thermique

L'effet considéré dans cette section est celui du bruit thermique. Le potentiel est pris de nouveau symétrique et la membrane n'a pas de tension de surface. Les simulations étant longues l'équation complète n'a pas été simulée. Pour l'étude, nous reprendrons le modèle de kink auquel nous allons ajouter des forces de Langevin dont les amplitudes seront calculées grâce au théorème de fluctuation-dissipation. Pour cette section nous repasserons en variables physiques notées en minuscules.

5.3.1 Dynamique de kinks avec forces de Langevin

Pour l'ajout du bruit nous nous sommes inspirés de précédents travaux de T. Kawakatsu et T. Munakata et de K. Kawasaki et T. Ohta [47, 48] qui ont étudié la dynamique de modèles de kinks en ajoutant du bruit sous la forme d'une force de Langevin.

Forces et énergie d'interaction entre kinks

Explicitons d'abord les forces entre les kinks. Nous définissons \mathcal{E}_λ l'énergie d'une période d'un état stationnaire périodique de longueur d'onde λ avec deux zéros et de hauteur moyenne nulle,

$$\mathcal{E}_\lambda = \int_0^\lambda dx \left[\frac{\kappa}{2} (\partial_{xx} h_\lambda)^2 + \mathcal{U}(h_\lambda) \right], \quad (5.34)$$

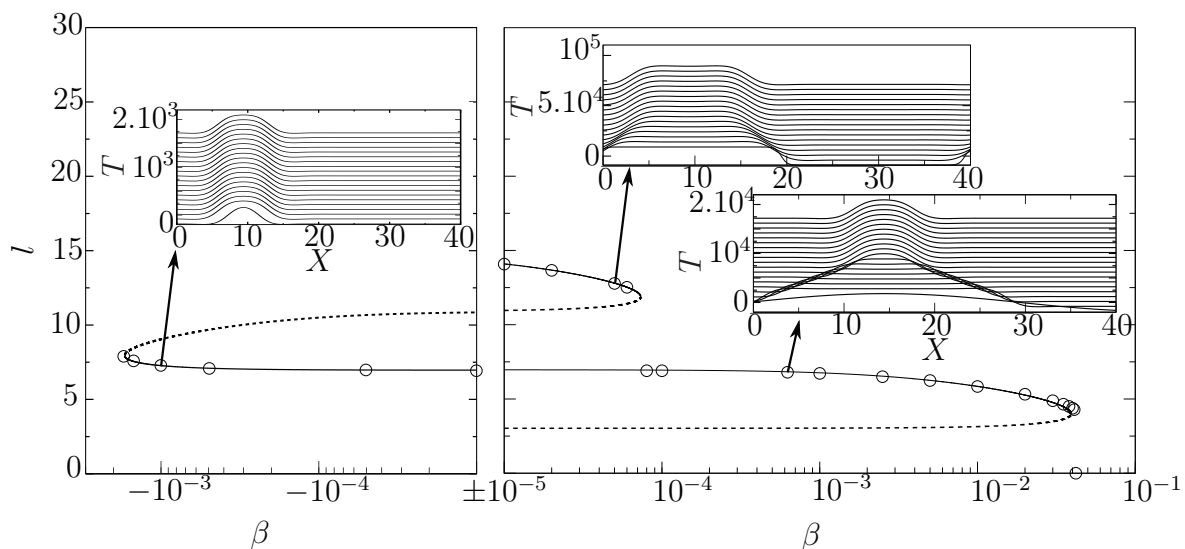


FIGURE 5.7 – Taille l des domaines en fonction de β . Les points représentent les points obtenus par simulation. La courbe est calculée à partir du modèle de kinks, les parties en pointillé désignent les valeurs instables. Les encadrés correspondent à l'évolution de la membrane pour la simulation correspondant au point d'où part la flèche.

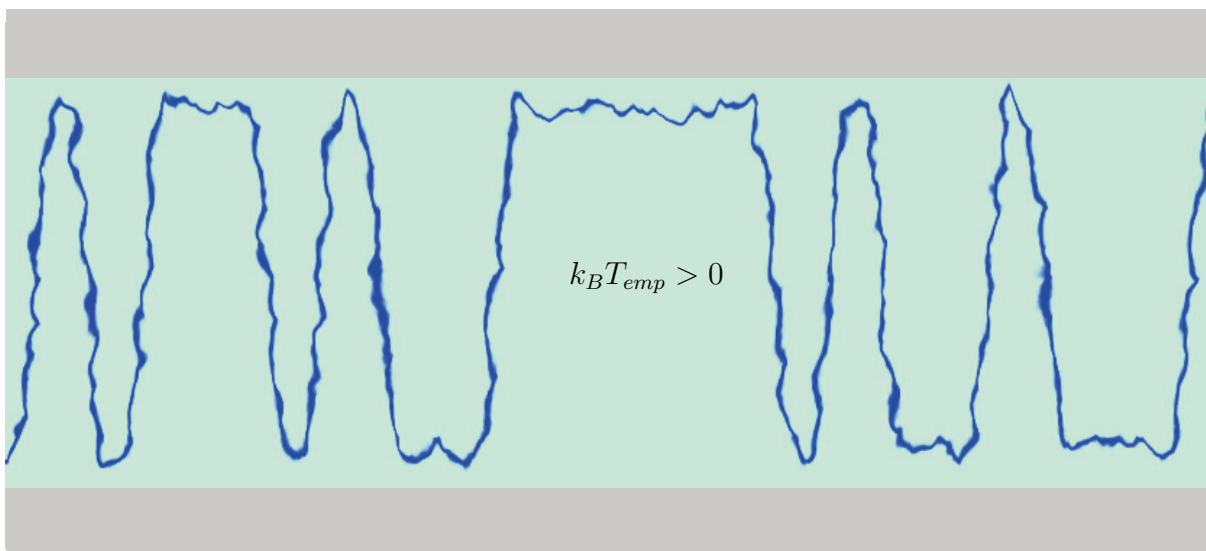


FIGURE 5.8 – Schéma du système avec du bruit thermique.

5.3. BRUIT THERMIQUE

avec h_λ la hauteur de la membrane pour ces états stationnaires périodiques. Considérons une membrane d'énergie \mathcal{E}_{mem} . L'énergie de la partie de la membrane se situant entre x_n et x_{n+1} est notée $\mathcal{E}_{n+1/2}$. Nous faisons l'approximation que

$$\mathcal{E}_{n+1/2} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_\lambda|_{\lambda=2\ell_{n+1/2}}. \quad (5.35)$$

La force subie par le n -ième kink sera alors

$$f_{kink}^{(n)} = -\frac{d}{dx_n} \mathcal{E}_{mem} = \partial_\lambda \mathcal{E}_\lambda|_{\lambda=2\ell_{n+1/2}} - \partial_\lambda \mathcal{E}_\lambda|_{\lambda=2\ell_{n-1/2}}. \quad (5.36)$$

De l'équation (5.34) nous calculons

$$\partial_\lambda \mathcal{E}_\lambda = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx \left[-\frac{3\kappa}{2} (\partial_x h_\lambda)^2 + \mathcal{U}(h_\lambda) \right]. \quad (5.37)$$

Par ailleurs, nous remarquons que

$$\partial_x h_\lambda \frac{\delta \mathcal{E}_{mem}}{\delta h} = \partial_x \left[\kappa \partial_x h_\lambda \partial_x^3 h_\lambda - \frac{\kappa}{2} (\partial_{xx} h_\lambda)^2 + \mathcal{U}(h_\lambda) \right], \quad (5.38)$$

or un état stationnaire vérifie $\delta \mathcal{E}_{mem} / \delta h = 0$. Nous en déduisons par périodicité de la membrane que

$$\kappa \partial_x h_\lambda \partial_x^3 h_\lambda - \frac{\kappa}{2} (\partial_{xx} h_\lambda)^2 + \mathcal{U}(h_\lambda) = \mathcal{U}_\lambda^* \quad (5.39)$$

avec \mathcal{U}_λ^* une constante. Cette constante peut être réécrite de la manière suivante en utilisant l'intégration par parties

$$\mathcal{U}_\lambda^* = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx \mathcal{U}_\lambda^* = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx \left[\kappa \partial_x h_\lambda \partial_x^3 h_\lambda - \frac{\kappa}{2} (\partial_{xx} h_\lambda)^2 + \mathcal{U}(h_\lambda) \right] = \partial_\lambda \mathcal{E}_\lambda. \quad (5.40)$$

Finalement

$$f_{kink}^{(n)} = \mathcal{U}_\lambda^*|_{\lambda=2\ell_{n+1/2}} - \mathcal{U}_\lambda^*|_{\lambda=2\ell_{n-1/2}}. \quad (5.41)$$

De l'expression linéarisée des états stationnaires (voir équation (3.28))

$$h(x) \approx h_m + h_0 \left\{ R \left[\frac{\mathcal{U}_0^{1/4}}{h_0^{1/2} \kappa^{1/4}} (x - x_n) \right] + R \left[\frac{\mathcal{U}_0^{1/4}}{h_0^{1/2} \kappa^{1/4}} (x_{n+1} - x) \right] \right\} \quad (5.42)$$

sur les plateaux. En insérant cette expression dans l'équation (5.39), nous trouvons

$$\mathcal{U}_\lambda^*|_{\lambda=2\ell_{n+1/2}} = \mathcal{U}(h_m) + 2\mathcal{U}_m'' \mathcal{A}^2 \hat{R} \left[\frac{\mathcal{U}_m'^{1/4}}{2^{1/2} \kappa^{1/4}} \ell_{n+1/2} \right] \quad (5.43)$$

avec

$$\hat{R}(l) = \cos(l + 2\alpha) \exp(-l) \quad (5.44)$$

et $\mathcal{A} = h_0 A$. Comme \mathcal{U} est définie à une constante près, nous pouvons choisir $\mathcal{U}(h_m) = 0$. $\mathcal{U}_\lambda^*|_{\lambda=2\ell_{n+1/2}}$ est alors directement proportionnel à $\tilde{R}_{nc}(\ell_{n+1/2})$, l'interaction normalisée

CHAPITRE 5. ROBUSTESSE DES ÉTATS GELÉS ET TRANSITION VERS LE MÛRISSEMENT

subie par le kink n de la part du kink $n + 1$. Puisque $\partial_\lambda \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{U}_\lambda^*$, il s'en suit directement que

$$\mathcal{E}_\lambda = 2\mathcal{E}_{kink} - 2\mathcal{U}_m'' \mathcal{A}^2 \int_\lambda^\infty d\lambda' \hat{R} \left[\frac{\mathcal{U}_m''^{1/4}}{2^{1/2} \kappa^{1/4}} \frac{\lambda'}{2} \right], \quad (5.45)$$

le terme constant est déterminé par le fait que l'énergie d'une membrane de longueur d'onde infinie vaut simplement deux fois l'énergie d'un kink isolé \mathcal{E}_{kink} . Finalement nous obtenons

$$\mathcal{E}_\lambda = 2\mathcal{E}_{kink} + 16\mathcal{A}^2 \mathcal{U}_m''^{3/4} \kappa^{1/4} \sin \left[\frac{\mathcal{U}_m''^{1/4}}{2^{1/2} \kappa^{1/4}} \frac{\lambda}{2} + 2\alpha - \frac{\pi}{4} \right] \exp \left(-\frac{\mathcal{U}_m''^{1/4}}{2^{1/2} \kappa^{1/4}} \frac{\lambda}{2} \right). \quad (5.46)$$

L'énergie adimensionnée d'une longueur d'onde $E_\lambda = \mathcal{E}_\lambda / (\mathcal{U}_0^{3/4} \kappa^{1/4} h_0^{1/2})$ en fonction de λ est tracée en (d) sur la figure 5.9. La courbe rouge correspond au calcul qui vient d'être présenté et les points correspondent aux résultats des simulations. L'accord entre les deux est très bon, notamment en ce qui concerne la phase des oscillations.

Cas non-conservé

Reprenons la dynamique de kinks de la section 4.2. Pour calculer l'amplitude du bruit nous repassons en variables physiques. Les normalisations définies dans la section 3.1 sont $T = [\nu \mathcal{U}_0 / (2h_0^2)]t$ et $X = [\mathcal{U}_0 / (\kappa h_0^2)]^{1/4}x$. Nous pouvons écrire

$$\dot{x}_n = \eta \mathcal{U}_0 \left[\tilde{R}_{nc}(l_{n+1/2}) - \tilde{R}_{nc}(l_{n-1/2}) \right] + \zeta_n(t) = \eta f_n^{nc} + \zeta_n(t) \quad (5.47)$$

avec

$$\eta = \frac{\nu \kappa^{1/4}}{2\mathcal{U}_0^{1/4} h_0^{3/2}}. \quad (5.48)$$

\mathcal{U}_0 est une énergie par unité de longueur donc est homogène à une force et η est la mobilité des kinks. Les grandeurs adimensionnées \tilde{R}_{nc} et $l_{n+1/2}$ sont définies par

$$\tilde{R}_{nc}(l) = \frac{2\mathcal{U}_m'' \mathcal{A}^2}{\int dX (\partial_X H^0)^2} \cos(\Omega l + 2\alpha) \exp(-\Omega l) \quad (5.49)$$

et

$$l_{n+1/2} = [\mathcal{U}_0 / (\kappa h_0^2)]^{1/4} \ell_{n+1/2}. \quad (5.50)$$

ζ_n est un bruit blanc vérifiant

$$\langle \zeta_{n_1}(t_1) \zeta_{n_2}(t_2) \rangle = 2\mathcal{D}_\zeta \delta_{n_1 n_2} \delta(t_1 - t_2), \quad (5.51)$$

où δ_{ij} est symbole de Kronecker et δ est l'opérateur de Dirac. D'après le théorème de fluctuation-dissipation, la relation d'Einstein à la température T_{emp} donne

$$\mathcal{D}_\zeta = \eta k_B T_{emp}, \quad (5.52)$$

dont l'amplitude du bruit est déduite.

Cas conservé

5.3. BRUIT THERMIQUE

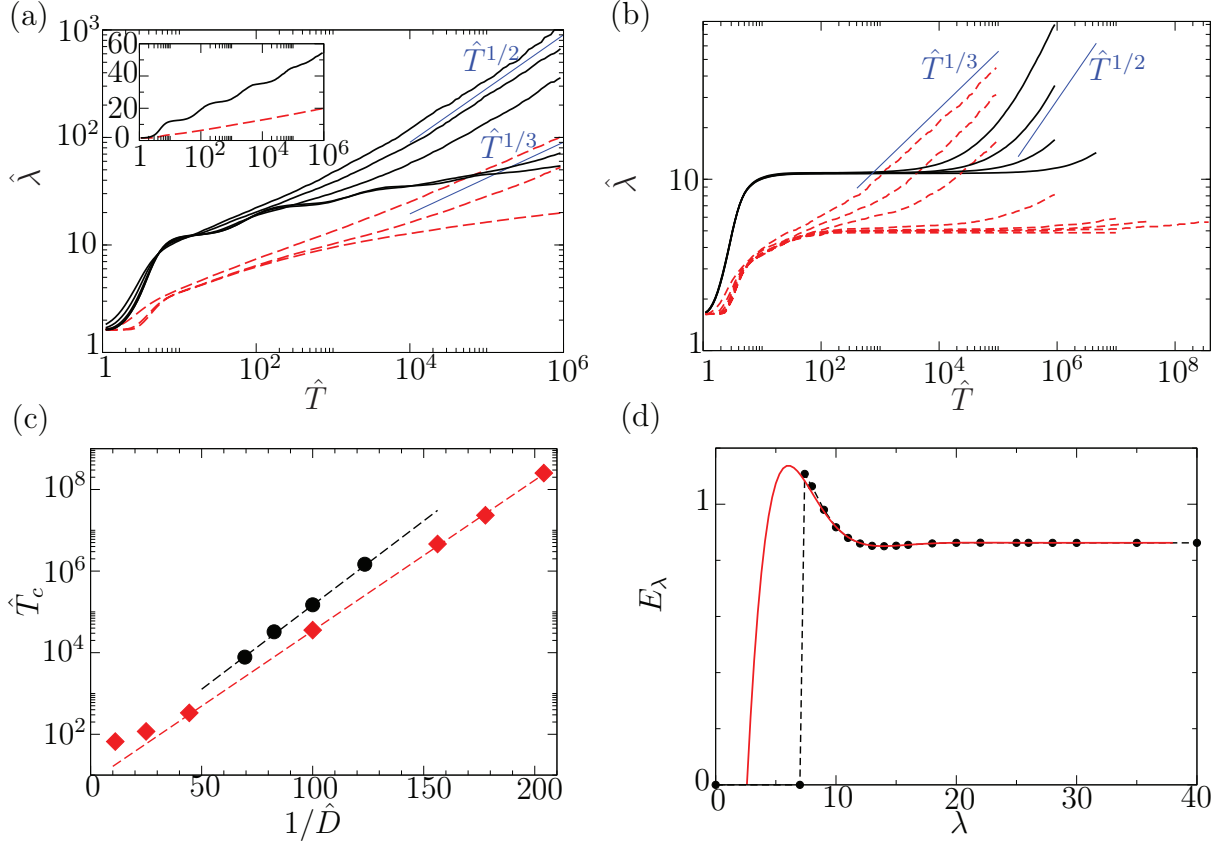


FIGURE 5.9 – (a) Evolution de la longueur d’onde moyenne normalisée en fonction du temps pour le cas d’une membrane avec une tension et pas de rigidité de courbure en présence de bruit thermique. En noir, pour l’équation non-conservée TDGL, avec de bas en haut $\hat{D} = 0,002; 0,01; 0,1; 0,2; 0,3$. En pointillé rouge, l’équation conservée CH pour $\hat{D} = 0,002; 0,1; 0,3$ de bas en haut. Les lignes bleues correspondent à des lois de puissances. (b) Idem que (a) pour le cas d’une membrane avec une rigidité de courbure sans tension. En noir, l’équation TDGL 4 pour $\hat{D} = 0,09; 0,1; 0,11; 0,12$ toujours de bas en haut. En pointillés rouge, CH4 avec $\hat{D} = 0,05; 0,07; 0,075; 0,08; 0,1; 0,15; 0,2; 0,3$. (c) Temps \hat{T}_c à partir duquel le mûrissement s’enclenche. Les points noirs correspondent à l’équation TDGL4 et les carrés rouge à CH4. (d) L’énergie d’une période d’un état périodique stationnaire en fonction de la longueur d’onde. Les points correspondent aux résultats obtenus par simulation et la courbe rouge correspond à l’approximation analytique des grandes longueurs d’onde.

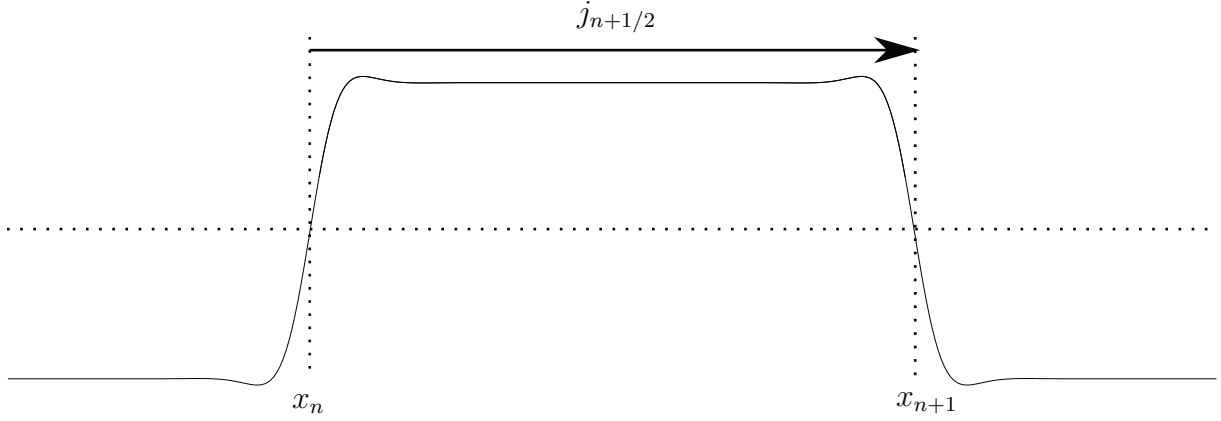


FIGURE 5.10 – Schéma explicatif du flux $j_{n+1/2}$ dans le cas conservé.

Pour le cas des murs imperméables, les normalisations sont définies par $T = [\mathcal{U}_0^{3/2}/(24\mu\kappa^{1/2})]t$ et $X = [\mathcal{U}_0/(\kappa h_0^2)]^{1/4}x$.

Dans le cas conservé, les mouvements de kinks sont plus complexes. Les déplacements de kinks seuls sont impossibles par la conservation de la hauteur moyenne de la membrane. Il faut considérer les couples de kinks qui vont alors former un domaine. Le domaine $n+1/2$ est la partie entre les kinks n et $n+1$. En présence de flux $j_{n+1/2}$ (voir figure 5.10) le domaine $n+1/2$ se déplace à la vitesse

$$j_{n+1/2} = \eta_{n+1/2}(f_{n+1}^c + f_n^c) + \psi_{n+1/2} \quad (5.53)$$

où $\eta_{n+1/2}$ est la mobilité du domaine, $f_n^c = \mathcal{U}_0[\tilde{R}_c(l_{n+1/2}) - \tilde{R}_c(l_{n-1/2})]$ et $\psi_{n+1/2}$ est un bruit blanc vérifiant

$$\langle \psi_{n_1+1/2}(t_1) \psi_{n_2+1/2}(t_2) \rangle = 2\mathcal{D}_{\psi_{n_1+1/2}} \delta_{n_1 n_2} \delta(t_1 - t_2), \quad (5.54)$$

le tout dans les variables physiques. Enfin, \tilde{R}_c est définie par

$$\tilde{R}_c(l) = \frac{M(H_m) \int dX (\partial_X H^0)^2}{(\Delta H)^2} \tilde{R}_{nc}(l). \quad (5.55)$$

La vitesse du n -ième kink est donnée par

$$\dot{x}_n = j_{n+1/2} + j_{n-1/2}. \quad (5.56)$$

L'identification avec le modèle de kinks (equation (4.32)) sans les termes sous-dominants en \dot{x}_k permet d'écrire que

$$\eta_{n+1/2} = \frac{\mathcal{U}_0^{1/4} h_0^{1/2}}{24\mu\kappa^{1/4} l_{n+1/2}} = \frac{h_0}{24\mu \ell_{n+1/2}} \quad (5.57)$$

où $l_{n+1/2}$ est la taille normalisée du domaine et $\ell_{n+1/2}$ est la longueur physique correspondante. Le théorème fluctuation-dissipation permet de relier les grandeurs $\mathcal{D}_{\psi_{n+1/2}}$ et $\eta_{n+1/2}$ par la relation

$$\mathcal{D}_{\psi_{n+1/2}} = \eta_{n+1/2} k_B T_{emp}. \quad (5.58)$$

5.3. BRUIT THERMIQUE

Et enfin, nous définissons

$$\xi_{n+1/2} = \ell_{n+1/2}^{1/2} \psi_{n+1/2}, \quad (5.59)$$

dont nous déduisons

$$\langle \xi_{n_1+1/2}(t_1) \xi_{n_2+1/2}(t_2) \rangle = 2\ell_{n_1+1/2} \mathcal{D}_{\psi_{n_1+1/2}} \delta_{n_1 n_2} \delta(t_1 - t_2) = 2\mathcal{D}_\xi \delta_{n_1 n_2} \delta(t_1 - t_2). \quad (5.60)$$

Le coefficient de diffusion obtenu est constant

$$\mathcal{D}_\xi = \frac{h_0}{24\mu} k_B T_{emp}. \quad (5.61)$$

5.3.2 Activation du mûrissement

Les simulations de la dynamique de kinks bruitée ont été réalisées par Paolo Politi de l'Institut des Systèmes Complexes de Florence. Le nouveau jeu de variables utilisée ici est construit de telle sorte que tous les préfacteurs soient égaux à 1, les variables sont alors notées avec un chapeau. Dans cette situation les dynamiques de kinks sont régies par

$$\dot{\hat{X}}_n = \hat{R}(\hat{l}_{n+1/2}) - \hat{R}(\hat{l}_{n-1/2}) + \hat{\zeta}(\hat{T}), \quad (5.62)$$

$$\dot{\hat{X}}_n = \frac{1}{\hat{l}_{n+1/2}} \left[\hat{R}(\hat{l}_{n+3/2}) - \hat{R}(\hat{l}_{n-1/2}) \right] + \frac{1}{\hat{l}_{n-1/2}} \left[\hat{R}(\hat{l}_{n+1/2}) - \hat{R}(\hat{l}_{n-3/2}) \right] \quad (5.63)$$

$$+ \frac{\hat{\xi}_{n+1/2}(\hat{T})}{\hat{l}_{n+1/2}^{1/2}} + \frac{\hat{\xi}_{n-1/2}(\hat{T})}{\hat{l}_{n-1/2}^{1/2}}, \quad (5.64)$$

où \hat{R} est une expression normalisée de \tilde{R} défini dans l'équation (5.31). Pour les nouvelles variables les longueurs sont définies par $\hat{X} = [\mathcal{U}_m''^{1/4}/2^{1/2}\kappa^{1/4}]x$, \mathcal{U}_m'' est la dérivée seconde du potentiel physique au minimum du potentiel. Pour le cas non-conservé le nouveau temps et coefficient de diffusion sont

$$\hat{T} = \frac{\nu \mathcal{A}^2 \mathcal{U}_m''^{5/4}}{2^{1/2} \kappa^{1/4} \int (\partial_x h^0)^2} t \quad (5.65)$$

et

$$\hat{D}_\zeta = \frac{2^{1/2} \mathcal{U}_0^{1/4} h_0^{3/2}}{\nu \mathcal{A}^2 \mathcal{U}_m''^{3/4} \kappa^{1/2}} \mathcal{D}_\zeta = \hat{D}. \quad (5.66)$$

Nous rappelons que h^0 est le profil d'un kink isolé et \mathcal{A} est l'amplitude de sa queue en variables physiques. Pour le cas conservé le temps et le coefficient de diffusion sont redéfinis par

$$\hat{T} = \frac{\mathcal{A}^2 \mathcal{U}_m''^{3/2} h_0^3}{24\mu \kappa^{1/2} (\Delta h)^2} t \quad (5.67)$$

et

$$\hat{D}_\xi = \frac{24\mu}{2^{1/2} \mathcal{A}^2 \mathcal{U}_m''^{3/4} \kappa^{1/4} h_0} \mathcal{D}_\xi = \hat{D} \quad (5.68)$$

CHAPITRE 5. ROBUSTESSE DES ÉTATS GELÉS ET TRANSITION VERS LE MÛRISSEMENT

Δh est la distance entre les deux minimums du potentiel en variables physiques. Les nouveaux bruits vérifient

$$\langle \hat{\zeta}_{n_1}(\hat{T}_1) \hat{\zeta}_{n_2}(\hat{T}_2) \rangle = \hat{D} \delta_{n_1 n_2} \delta(\hat{T}_1 - \hat{T}_2), \quad (5.69)$$

$$\langle \hat{\xi}_{n_1+1/2}(\hat{T}_1) \hat{\xi}_{n_2+1/2}(\hat{T}_2) \rangle = \hat{D} \delta_{n_1 n_2} \delta(\hat{T}_1 - \hat{T}_2). \quad (5.70)$$

Le système choisi comme condition initiale pour les simulations est une répartition aléatoire de kink avec pour longueur d'onde moyenne $\hat{\lambda}(\hat{T} = 0) = 2, 30 \times (\mathcal{U}''_m h_0^2 / \mathcal{U}_0)^{-1/4}$, la longueur d'onde la plus instable du modèle de kink. Nous pouvons voir sur la figure 5.9 en (b) que dans le cas d'une membrane avec une rigidité de courbure, il y a du mûrissement quelque soit l'amplitude du bruit. Aux temps longs le système croît en loi de puissance avec un exposant 1/2 pour le cas non-conservé, et 1/3 pour le cas conservé. Nous retrouvons les mêmes exposants pour une membrane avec ou sans rigidité de courbure. Ces exposants peuvent être retrouvés par une analyse dimensionnelle. En effet, aux temps longs, lorsque la distance entre les kinks est grande, le comportement stochastique domine. L'expression précise de la partie déterministe de l'équation d'évolution n'a plus d'importance. Les dynamiques de kinks s'expriment alors simplement sous la forme

$$\dot{\hat{X}}_n = \hat{\zeta}(\hat{T}), \quad (5.71)$$

$$\dot{\hat{X}}_n = \frac{\hat{\xi}_{n+1/2}(\hat{T})}{\hat{l}_{n+1/2}^{1/2}} + \frac{\hat{\xi}_{n-1/2}(\hat{T})}{\hat{l}_{n-1/2}^{1/2}}, \quad (5.72)$$

pour le cas non-conservé et conservé respectivement. Dimensionnellement, les vitesses des kinks sont en \hat{l}/\hat{T} et les forces de Langevin en $\hat{T}^{-1/2}$. Nous retrouvons bien que la distance typique entre les kinks évolue comme $\hat{l} \propto \hat{T}^{1/2}$ pour le cas non-conservé et en $\hat{l} \propto \hat{T}^{1/3}$ pour le cas conservé.

Nous remarquons également que le mûrissement en loi de puissance ne s'enclenche qu'après un temps fini. Ceci est d'autant plus visible pour les équations d'ordre 4 (figure 5.9 en (b)) où $\hat{\lambda}$ augmente jusqu'à atteindre un plateau, et au bout d'un certain temps le mûrissement démarre. \hat{T}_c est défini comme le temps à partir duquel la longueur d'onde moyenne $\hat{\lambda}$ dépasse une certaine valeur choisie arbitrairement $\hat{\lambda}_c$. Ce temps vérifie une loi exponentielle par rapport à l'amplitude du bruit \hat{D}

$$\begin{aligned} \hat{T}_c &= \hat{T}_{c0} \exp \left(\frac{\hat{E}_0}{\hat{D}} \right) \\ &= \hat{T}_{c0} \exp \left(\hat{E}_0 \frac{2^{1/2} \mathcal{A}^2 \mathcal{U}''^{3/4}_m \kappa^{1/4}}{k_B T_{emp}} \right), \end{aligned} \quad (5.73)$$

comme nous pouvons le voir en (c) sur la figure 5.9. La constante adimensionnée \hat{E}_0 peut être vue comme une barrière énergétique à franchir qui correspond au blocage de la dynamique par les oscillations des queues des kinks. Les simulations donnent $\hat{E}_0 \approx 0,095$ pour TDGL4 avec $\hat{\lambda}_c = 17 \times (\mathcal{U}''_m h_0^2 / \mathcal{U}_0)^{-1/4}$ et $\hat{E}_0 \approx 0,085$ pour CH4 avec $\hat{\lambda}_c = 7,92 \times (\mathcal{U}''_m h_0^2 / \mathcal{U}_0)^{-1/4}$.

5.3. BRUIT THERMIQUE

Cette énergie d'activation \hat{E}_0 peut être retrouvée à partir du modèle de kinks. De la courbe tracée à partir du modèle de kinks sur la figure 5.9 en (d), nous pouvons définir une énergie d'activation normalisée qui correspond à la barrière d'énergie

$$\mathcal{E}_b = \left(\mathcal{U}_0^{3/4} \kappa^{1/4} h_0^{1/2} \right) E_b \quad (5.74)$$

à franchir pour passer le premier pic avec \mathcal{E}_b la barrière d'énergie en variables physiques. Cette barrière est égale à la différence entre le maximum et le premier minimum de E_λ . La valeur théorique vaut $E_b^{th} \approx 0,143$ d'après l'équation (5.46), et la valeur numérique est $E_b^{num} \approx 0,13$ d'après la figure 5.9. Cette énergie E_b est reliée à \hat{E}_0 par la relation (voir equation (5.73))

$$\hat{E}_0 = \frac{h_0^{7/2} \mathcal{U}_0^{3/4}}{2^{1/2} \mathcal{A}^2 \mathcal{U}_m'^{3/4}} E_b. \quad (5.75)$$

En reprenant la valeur de E_b^{th} cela nous donne $\hat{E}_0 \approx 0,093$ (toujours en considérant $\mathcal{U}(h) = \mathcal{U}_0(h^4/4 - h_m^2 h^2/2)/h_0^4$ et $h_m = 0,9h_0$), en accord avec les valeurs trouvées précédemment par simulation. Cependant, ce résultat ne peut pas être comparé directement aux expériences. En effet, une membrane bidimensionnelle présente des fluctuations qualitativement différente de notre modèle 1D. Ceci se traduit par exemple par le fait que l'expression (5.74) de l'énergie de barrière ne peut pas être généralisée à 2D en remplaçant les constantes par leurs analogues bidimensionnels. En effet, l'expression obtenue n'aurait pas la dimension d'une énergie.

Nous avons vu dans le chapitre 3 que les dynamiques sont gelées pour notre système. Dans ce chapitre, la robustesse de ces états a été vérifiée. Nous savons désormais, que le mûrissement peut être restauré en rajoutant certains ingrédients physiques. Si nous considérons, en plus de la rigidité de courbure, une tension de surface dans l'énergie élastique de la membrane, il existe une tension critique ζ_c au-dessus de laquelle, la dynamique donne du mûrissement. Cependant, les valeurs de tension observées dans les expériences sont inférieures à cette tension critique. Ensuite, l'ajout d'une asymétrie au potentiel d'interaction permet pour le cas non-conservé la disparition des domaines d'adhésion dans le puits du potentiel le plus haut pour des asymétries suffisamment fortes. Pour les faibles asymétries, il existe un nombre finie de tailles de domaines possibles dans le puits du potentiel le plus haut. Enfin, nous observons que l'ajout de bruit restaure systématiquement le mûrissement. Une énergie d'activation à fournir afin de débiter le mûrissement a pu également être mise en évidence.

Chapitre 6

Cisaillement d'une membrane 1D confinée entre deux murs plans imperméables

Nous avons jusqu'à maintenant étudié la dynamique d'une membrane confinée entre deux murs représentée sur la figure 2.1 sans cisaillement. Nous avons observé des états gelés ordonnés dans la limite des murs très perméables et désordonnés dans la limite des murs imperméables. Nous avons ensuite vu que ces états gelés pouvaient disparaître par l'ajout d'une tension de surface, d'un potentiel asymétrique pour les murs perméables ou d'un bruit thermique. En nous inspirant de la biolubrification, nous allons désormais examiner le comportement d'une membrane lipidique en présence d'un cisaillement imposé par une vitesse v_c des murs. Dans ce chapitre, seule la limite des murs imperméables, qui correspond au cas conservé, sera étudiée. De plus, la membrane considérée n'aura pas de tension de surface et le potentiel sera symétrique. Le système étudié est représenté sur la figure 6.1.

En conséquence du cisaillement, de l'énergie est injectée au système et le maintient hors-équilibre. Contrairement aux chapitres précédents, l'inégalité $\partial_t \mathcal{E} \leq 0$ n'est plus vérifiée, le système n'est plus variationnel. Nous allons montrer que la dynamique présente alors de nouveaux régimes.

En plus de la dynamique de la membrane, nous nous intéresserons à la tribologie du système. Nous chercherons donc à calculer la force de frottement qui s'exerce sur les murs durant le cisaillement et notamment le rôle de la membrane lipidique. Finalement, nous identifierons des comportements tribologiques contrôlés par la dynamique non-linéaire de la membrane. Par exemple, le comportement à faible taux de cisaillement est thixotrope et rhéoépaississant, alors qu'il est rhéofluidifiant à fort taux de cisaillement.

6.1 Dynamique de la membrane

Commençons par observer la dynamique de la membrane en fonction de la vitesse de cisaillement v_c . Seul la limite des murs imperméables est considérée ici. Nous rappelons que dans cette limite, la normalisation est définie par $T = [\mathcal{U}_0^{3/2}/(24\mu\kappa^{1/2})]t$ et $X =$

CHAPITRE 6. CISAILLEMENT D'UNE MEMBRANE 1D CONFINÉE ENTRE DEUX MURS PLANS IMPERMÉABLES

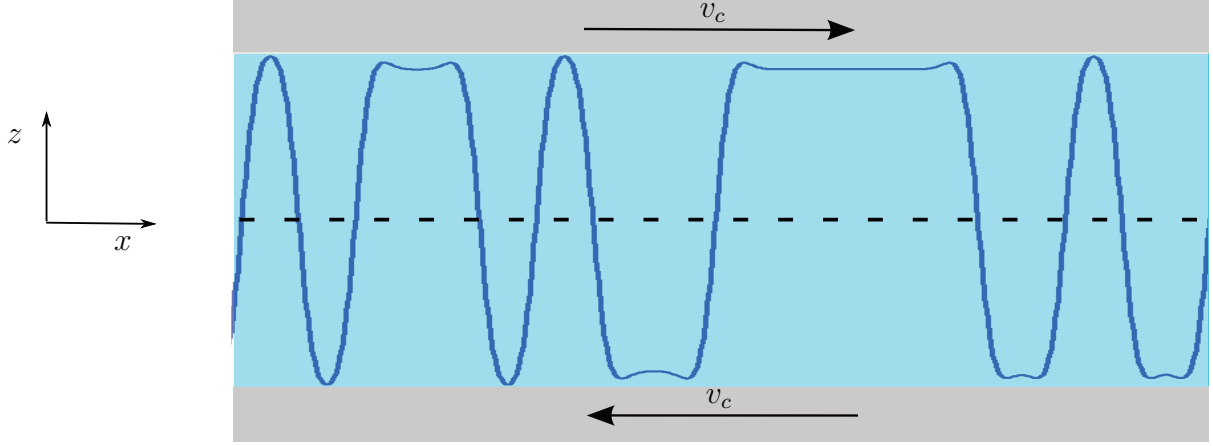


FIGURE 6.1 – Schéma du système étudié sous cisaillement. Les murs se déplacent à la vitesse v_c .

$[\mathcal{U}_0/(\kappa h_0^2)]^{1/4}x$. Il paraît alors naturel de définir la vitesse typique de cisaillement u_0 par

$$u_0 = \frac{[\mathcal{U}_0^{3/2}/(24\mu\kappa^{1/2})]}{[\mathcal{U}_0/(\kappa h_0^2)]^{1/4}}. \quad (6.1)$$

En reprenant le potentiel de l'article de P.S. Swain et D. Andelman [94] avec la viscosité de l'eau et $h_0 = 10^{-8}$ m, la vitesse typique trouvée est de l'ordre de 10^{-4} - 10^{-3} m.s $^{-1}$ qui correspond à un taux de cisaillement de 10^4 - 10^5 s $^{-1}$.

Des études expérimentales de la tribologie des membranes confinées ont été réalisées à Lyon dans les équipes de J.-P. Rieu et A.M. Trunfio-Sfarghiu [18]. Dans ces expériences, une, deux, ou plusieurs membranes sont confinées entre un substrat rigide et plat, et un substrat mou et poreux (gel). Les résultats semblent montrer que les dispositifs avec deux membranes, plutôt en phase gel, mènent à une réduction importante du coefficient de friction. Les ordres de grandeurs du cisaillement sont les mêmes que pour notre étude. Nos travaux constituent donc un premier pas pour comprendre ces expériences modèles.

Par ailleurs, les taux de cisaillement de nos modèles peuvent être comparés à ceux des expériences de cisaillement de phase lamellaire de D. Roux, F. Nallet et O. Diat [84]. Ces auteurs montrent que lorsque nous augmentons le cisaillement pour une phase lamellaire confinée entre deux plaques séparées d'une distance de l'ordre du millimètre, nous obtenons d'abord une phase stable, puis une déstabilisation menant à des oignons, puis à nouveau une phase stable à fort cisaillement. Dans ces expériences, si nous considérons une séparation de 10 nm entre chaque couche et sous un taux de cisaillement de 4.10^3 s $^{-1}$, nous nous trouvons dans le régime stable à fort taux de cisaillement. Nos taux de cisaillement sont encore plus élevés (10^4 - 10^5 s $^{-1}$), et devraient donc correspondre à un domaine de paramètre où les phase lamellaires sont stables par rapport à la formation

6.1. DYNAMIQUE DE LA MEMBRANE

d'oignons.

Afin d'obtenir l'équation d'évolution de la membrane cisailée, nous reprenons les mêmes conditions aux limites et forces que dans la sous-section 2.2.2 en rajoutant la vitesse de cisaillement v_c . Le système d'équations à résoudre est le suivant

$$\begin{cases} v_{x+}|_{z=h_0} = v_c, \end{cases} \quad (6.2)$$

$$\begin{cases} v_{x-}|_{z=-h_0} = -v_c, \end{cases} \quad (6.3)$$

$$\begin{cases} v_{x+}|_{z=h} = v_{x-}|_{z=h}, \end{cases} \quad (6.4)$$

$$\begin{cases} p_+ - p_- = f_n, \end{cases} \quad (6.5)$$

$$\begin{cases} \partial_z v_{x+}|_{z=h} - \partial_z v_{x-}|_{z=h} = 0, \end{cases} \quad (6.6)$$

$$\begin{cases} j_+ + j_- = j. \end{cases} \quad (6.7)$$

L'équation d'évolution est ensuite obtenue (calcul détaillé dans l'annexe B.1)

$$\partial_t h = \partial_x \left[-\frac{h_0^3}{24\mu} \left(1 - \left(\frac{h}{h_0} \right)^2 \right)^3 \partial_x f_n + \frac{3}{4} j \frac{h}{h_0} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{h}{h_0} \right)^2 - 1 \right) \right] - h_0 v_c \frac{h}{h_0} \partial_x \left(\frac{h}{h_0} \right), \quad (6.8)$$

avec la force normale par unité de longueur totale qui vaut

$$f_n = -\kappa \partial_x^4 h - \mathcal{U}'(h) \quad (6.9)$$

et le débit

$$j = \frac{h_0^3}{2\mu} \frac{1}{\mathcal{L}} \int_0^{\mathcal{L}} dx \frac{h}{h_0} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{h}{h_0} \right)^2 \right] \partial_x f_n, \quad (6.10)$$

\mathcal{L} est la longueur du système. Pour le calcul de j , le point de départ a été l'équation différentielle (2.41) avec $\nu = 0$ et des conditions aux limites périodiques ont été utilisées. L'équation d'évolution en variables normalisées s'écrit

$$\partial_T H = \partial_X \left[- (1 - H^2)^3 \partial_X F_n + J H \left(\frac{H^2}{3} - 1 \right) \right] - V_c H \partial_X H \quad (6.11)$$

avec

$$J = -\frac{9}{L} \int_0^L dX H \left(1 - \frac{H^2}{3} \right) \partial_X (\partial_X^4 H + U'(H)). \quad (6.12)$$

Nous rappelons que le terme de débit J n'a pas d'influence notable sur le comportement du système et qu'il est défini par $J = (18\mu\kappa^{1/4}h_0^{-3/2}\mathcal{U}_0^{-5/4})j$. Cependant les simulations par différences finies avec un schéma explicite ont pris en compte ce terme.

L'équation obtenue est simplement l'équation (3.13) du système sans cisaillement à laquelle nous rajoutons le terme convectif en $-v_c h \partial_x h$ qui brise la symétrie $x \leftrightarrow -x$. Cette équation est semblable à l'équation de Cahn-Hilliard convective dont nous reparlerons plus loin.

L'étude de stabilité linéaire qui consiste à perturber une membrane plane à la hauteur \bar{H} par $\delta H \propto \exp(\omega T + iqX)$ est très similaire au cas où $V_c = 0$. La relation de dispersion obtenue est

$$\omega = (1 - \bar{H}^2)^3 q^2 [-q^4 - U''(\bar{H})] - iqV_c \bar{H}. \quad (6.13)$$

CHAPITRE 6. CISAILLEMENT D'UNE MEMBRANE 1D CONFINÉE ENTRE DEUX MURS PLANS IMPERMÉABLES

La relation de dispersion est identique à celle sans cisaillement pour le cas conservé (voir equation (3.21)) avec le terme $-iqV_c\bar{H}$ en plus. Mais ce terme étant imaginaire il n'a qu'un effet propagatif et ne change pas la valeur de la longueur d'onde la plus instable. Il peut être absorbé par la dérivée temporelle à l'aide d'une transformation galiléenne. Selon la valeur de $U''(\bar{H})$ nous aurons apparition ou non d'instabilités (voir figure 3.3). Nous nous plaçons dans la zone où ces instabilités existent. Dans les instants initiaux, il y aura donc apparition de domaines d'adhésion de la même taille environ $\lambda_m = 2\pi(-3/U''(\bar{H}))^{1/4}$ que pour le cas du cisaillement nul. Pour le potentiel utilisé $U = H^4/4 - H_m^2 H^2/2$ avec $H_m = 0.9$ la longueur d'onde la plus instable vaut $\lambda_m \approx 8,72$. Dans la suite, nous présentons les dynamiques observées par simulation pour les différentes vitesses de cisaillement v_c . Ces simulations ont été réalisées par différence finies avec des conditions initiales aléatoires et une hauteur moyenne nulle.

6.1.1 Faibles vitesses : mûrissement, chaos et plateaux transitoires

Le premier régime qui va être présenté est celui des faibles vitesses de cisaillement. Cette zone correspond à des vitesses de cisaillement V_c allant de 0 à 0,5-0,9. Les frontières entre les différents régimes ne sont pas très bien définies. Pour les vitesses comprises dans cette tranche (0,5-0,9) nous avons observé des comportements correspondant au régime présenté dans cette sous-section mais aussi au régime présenté dans la sous-section suivante, ceci dépend beaucoup des conditions initiales. Nous en parlons plus en détail dans la sous-section 6.1.4.

Dans cette zone des vitesses de cisaillement faibles, le mûrissement est systématiquement observé. La longueur d'onde moyenne λ augmente avec le temps par fusion de domaines. De plus, nous avons bien une longueur d'onde initiale correspondant environ à la longueur d'onde la plus instable linéairement, $\lambda(T=0) \approx \lambda_m$, en accord avec l'étude de la stabilité linéaire. Sur la figure 6.2 en (a) est tracée l'évolution de la longueur d'onde en fonction du temps pour différentes vitesses de cisaillement pour des simulations par différences finies et un schéma explicite. Nous pouvons remarquer que le mûrissement ne débute qu'à partir d'un temps donné T_c , de la même manière que pour le bruit thermique. Plus la vitesse de cisaillement est faible et plus ce temps T_c est grand. Cependant, ce temps T_c ne suit pas une loi exponentielle en fonction de la vitesse de cisaillement.

En ce qui concerne la dynamique des kinks, il y a plusieurs régimes. Pour les temps courts, les trajectoires des kinks avec le temps semblent relativement rectilignes. Nous pouvons l'observer en (b) sur la figure 6.2 pour $V_c = 0.01$.

Pour les temps longs en revanche, les trajectoires des kinks ne sont plus du tout rectilignes. Comme nous le voyons en (c) sur la figure 6.2 pour $V_c = 0,3$ nous avons formation de paires de plateaux transitoires au cours de la dynamique. La structure de celles-ci est toujours la même, il s'y trouve au centre un antikink (en rouge sur la figure) séparant deux plateaux et deux kinks en noir forment les limites de la zone. Elles correspondent à des domaines d'adhésion localement plus grands que les autres. En dehors de ces plateaux la taille des domaines d'adhésion est plutôt homogène et est de l'ordre de $\lambda_m/2$. Cela est confirmé par le fait que plus il y a eu d'événement de mûrissement et plus la taille de ces "bulles" est grande. De plus, l'ensemble des kinks est soumis à des oscillations qui se

6.1. DYNAMIQUE DE LA MEMBRANE

propagent dans le système. Les échelles de temps pour $V_c = 0,01$ et $V_c = 0,3$ ne sont pas les mêmes, la dynamique est beaucoup plus lente pour $V_c = 0,01$. Nous voyons sur la figure 6.2, que pour les mêmes temps de simulation nous ne sommes pas dans le même régime pour $V_c = 0,01$ ou $0,3$.

De nouvelles observations ont récemment été faites grâce à des nouvelles simulations utilisant un schéma implicite dans l'espace de Fourier et en omettant le terme de débit J . Le code a été développé par le postdoctorant Tung To avec qui nous travaillons en collaboration. Les résultats des simulations sans le terme de débit, sur des systèmes plus grands et à des temps plus longs, confirment la présence de mûrissement dans la dynamique. Mais des comportements qui n'étaient pas encore observés jusqu'ici sont apparus aux temps longs. Nous observons deux états possibles. Premièrement, il peut y avoir une augmentation brutale de la longueur d'onde associée à la fusion rapide d'un grand nombre de kinks dans des zones localisées. Après cet événement brutal, la dynamique est chaotique, avec de nouvelles fusions de kinks, mais aussi des "gerbes de kinks", où de nombreux kinks sont formés dans une zone de taille réduite et dans un temps court. Un exemple de cet état est représenté sur la figure 6.4. Le deuxième état asymptotique observé est la translation en bloc d'une configuration désordonnée comme tracé sur la figure 6.5. L'évolution de la longueur d'onde moyenne en fonction du temps est tracée sur la figure 6.3. La courbe noire et la courbe verte représentent le premier état, nous voyons bien le saut de la longueur d'onde. La courbe rouge et la courbe bleue correspondent au deuxième état. Ces deux courbes semblent se comporter en loi de puissance, la courbe en pointillée est la fonction $\lambda = 1,05.T^{1/4}$.

6.1.2 Vitesses intermédiaires : états cellulaires

Nous allons maintenant discuter des vitesses intermédiaires. Cette zone est comprise entre $V_c \approx 0,7 \pm 0,2$ et $V_c \approx 3,25 \pm 0,25$. Les simulations donnent des états cellulaires périodiques de longueur d'onde proche de λ_m . Nous pouvons le voir sur la figure 6.6 en (a) où l'évolution du profil de la membrane avec le temps est tracée. Il nous est arrivé d'observer quelques défauts sur ces états périodiques pour les vitesses de la tranche supérieure de cette zone. Nous avons alors des domaines d'adhésion localement un peu plus grands que les autres comme nous pouvons le voir en (b) sur la figure 6.6. Il nous est aussi arrivé d'observer une translation globale du système selon l'axe X tout en conservant la structure périodique. Ces deux phénomènes sont surtout observés pour les vitesses V_c proches de la limite supérieure, c'est-à-dire les grandes vitesses.

Nous pouvons noter de plus que le profil de la membrane a tendance à se pencher dans le sens du cisaillement formant des sortes de dents de scie. Ce phénomène est d'autant plus accentué que V_c est élevé. De plus, l'amplitude des oscillations de la membranes diminue avec la vitesse de cisaillement. Le gradient de vitesse du fluide augmentant, la dissipation visqueuse aussi, il est donc plus difficile de s'approcher des murs.

6.1.3 Limites des grandes vitesses : chaos spatio-temporel

Nous allons maintenant étudier le comportement de la membrane dans la limite des grandes vitesses. Nous allons supposer qu'il est possible de faire un développement en

CHAPITRE 6. CISAILLEMENT D'UNE MEMBRANE 1D CONFINÉE ENTRE DEUX MURS PLANS IMPERMÉABLES

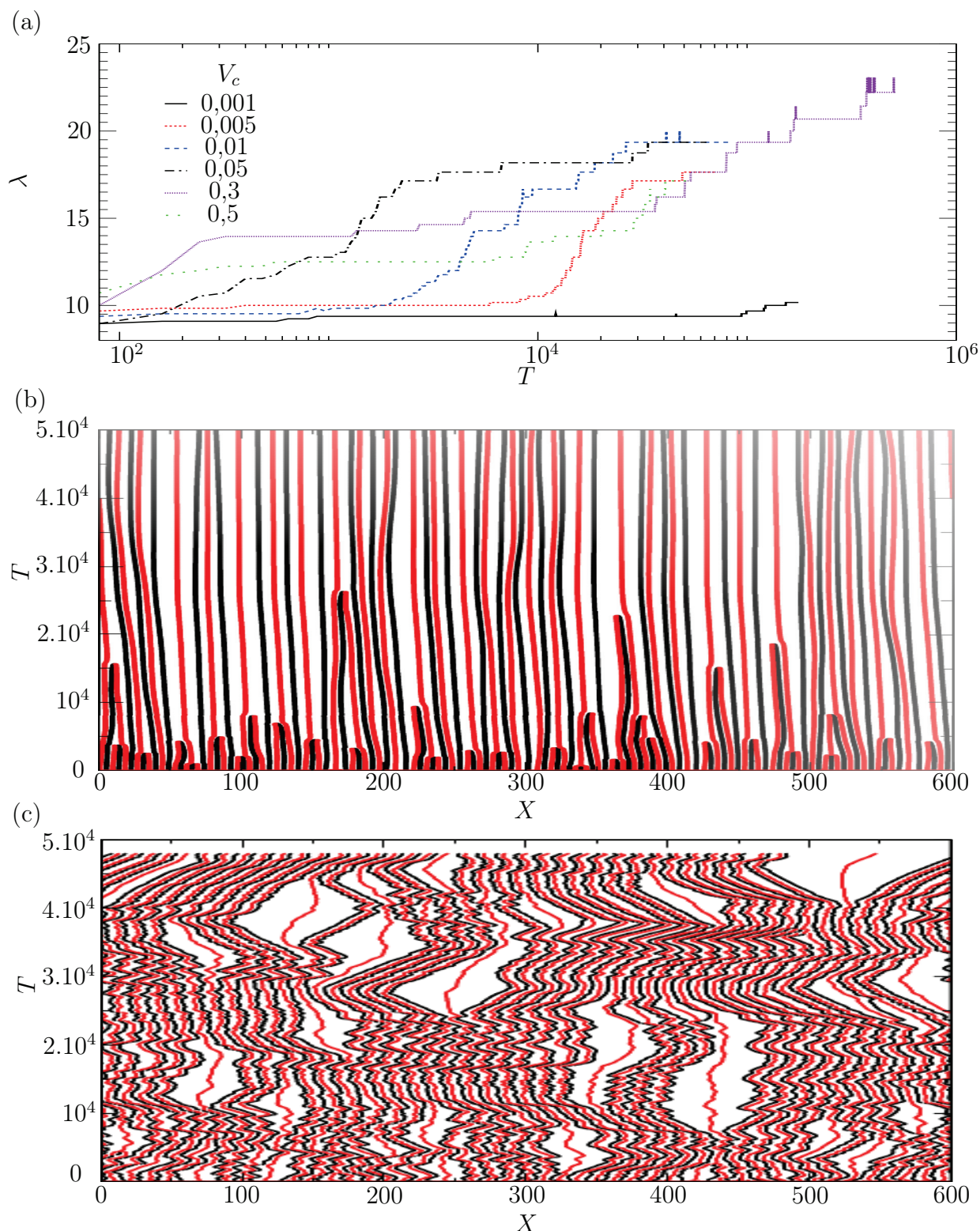


FIGURE 6.2 – Résultats de simulations pour le schéma explicite avec le terme de débit J . (a) Evolution de la longueur d'onde moyenne du système en fonction du temps pour différentes vitesses de cisaillement. (b) Trajectoires des zéros de la membrane en fonction du temps pour $V_c = 0,01$. Les points noirs correspondent aux zéros avec une pente positive et les points rouges correspondent aux zéros avec une pente négative. (c) Idem pour $V_c = 0,3$.

6.1. DYNAMIQUE DE LA MEMBRANE

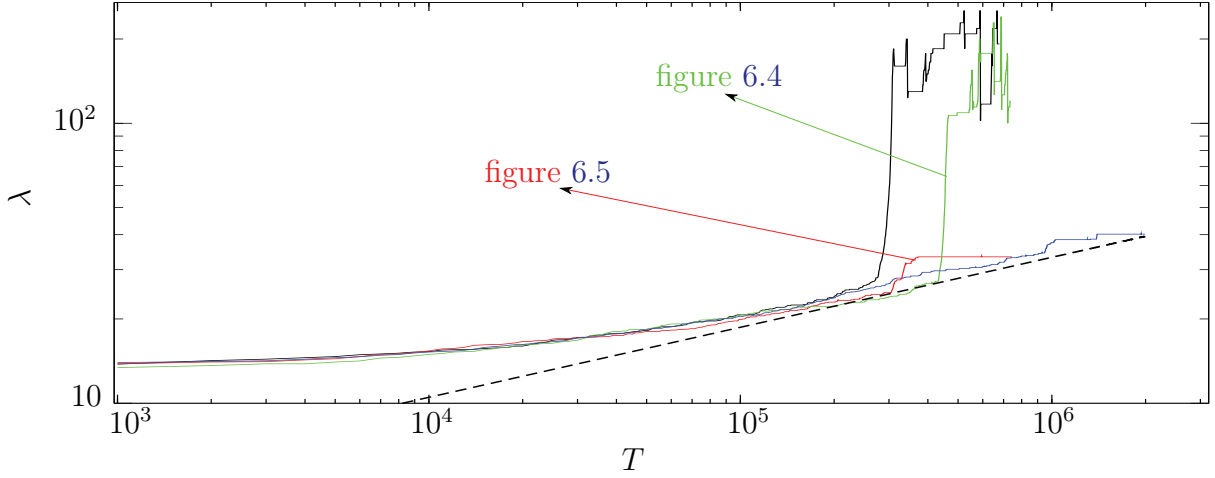


FIGURE 6.3 – Résultats de simulations pour le schéma implicite sans débit J . (a) Evolution de la longueur d’onde pour $V_c = 0, 3$. La courbe bleue correspond à un système de taille $L = 9600$ et les trois autres à $L = 4800$. La courbe en pointillé est une loi de puissance $\lambda = 1,05.T^{1/4}$.

$1/V_c$ autour de la hauteur moyenne de la membrane \bar{H} . Il est vérifié numériquement que les variations de H autour de sa valeur moyenne tendent bien vers 0 pour les grandes vitesses de cisaillement. Considérons

$$H = \bar{H} + \frac{\tilde{H}}{V_c} \quad (6.14)$$

avec \tilde{H} de l’ordre de l’unité. En réinjectant dans l’équation (6.11), nous obtenons au premier ordre en $1/V_c$

$$(\partial_T + V_c \bar{H} \partial_X) \tilde{H} = (1 - \bar{H}^2)^3 \partial_{XX} \left[\partial_X^4 \tilde{H} + U''(\bar{H}) \tilde{H} \right] - \tilde{H} \partial_X \tilde{H}. \quad (6.15)$$

Nous pouvons définir un nouveau temps $T' = T + X/(V_c \bar{H})$ si $\bar{H} \neq 0$, pour obtenir une simple dérivée temporelle à gauche. Si $\bar{H} = 0$ nous posons tout simplement $T = T'$.

Si $U''(\bar{H}) > 0$, ce qui correspondrait à une hauteur moyenne dans la zone stable (voir figure 3.3), alors le terme en dérivée seconde devient stabilisant (toutes les longueurs d’onde sont linéairement stables). L’équation d’évolution rappelle l’équation de Burgers [103]

$$\partial_t u = \partial_{xx} u - u \partial_x u, \quad (6.16)$$

qui décrit les ondes de choc.

Si au contraire $U''(\bar{H}) < 0$ (faibles hauteurs moyennes), notre équation d’évolution est très similaire à l’équation de Kuramoto-Sivashinsky (KS) [20, 83, 92]

$$\partial_t u = -\partial_x^4 u - \partial_{xx} u - \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 \quad (KS) \quad (6.17)$$

appliquée à $h = \partial_x u$

$$\partial_t h = -\partial_x^4 h - \partial_{xx} h - h \partial_x h, \quad (KS') \quad (6.18)$$

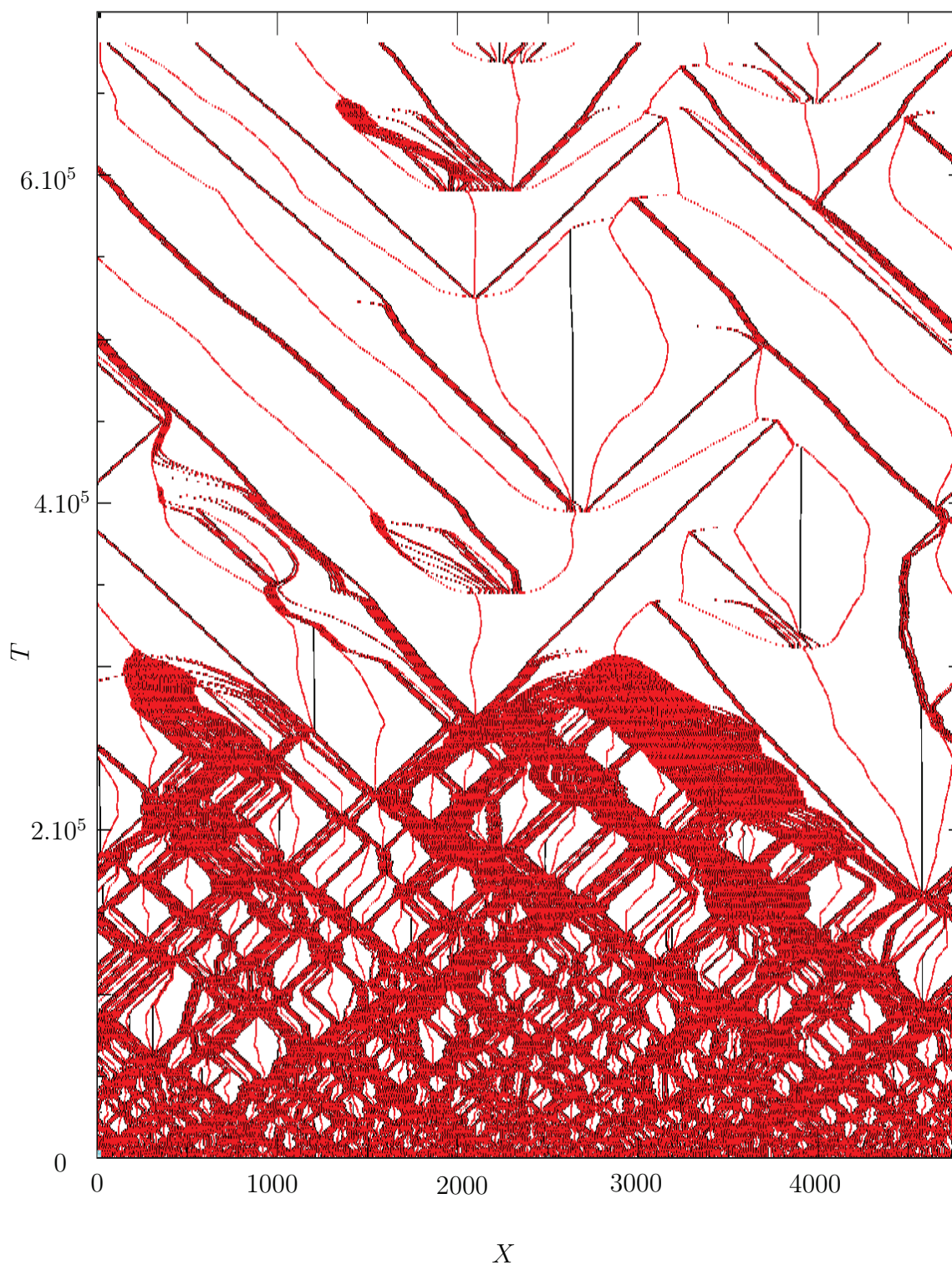


FIGURE 6.4 – Trajectoires des zéros de la membrane dans le cas où il y a augmentation brutale de la longueur d'onde. Les points noirs correspondent aux kinks et les points rouges aux antikinks.

6.1. DYNAMIQUE DE LA MEMBRANE

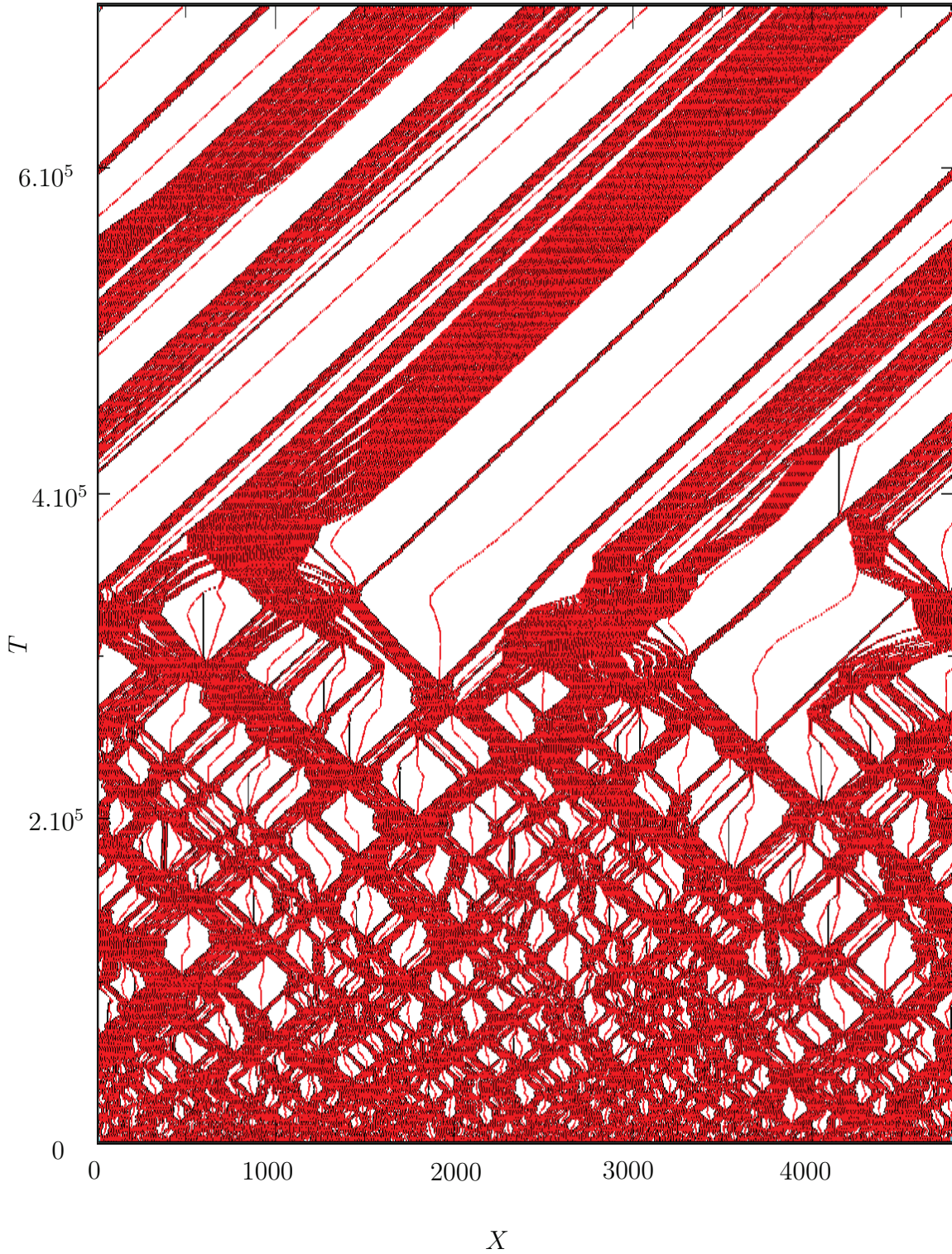


FIGURE 6.5 – Trajectoires des zéros de la membrane dans le cas où l'état final est une translation en bloc. Les points noirs correspondent aux kinks et les points rouges aux antikinks.

CHAPITRE 6. CISAILLEMENT D'UNE MEMBRANE 1D CONFINÉE ENTRE DEUX MURS PLANS IMPERMÉABLES

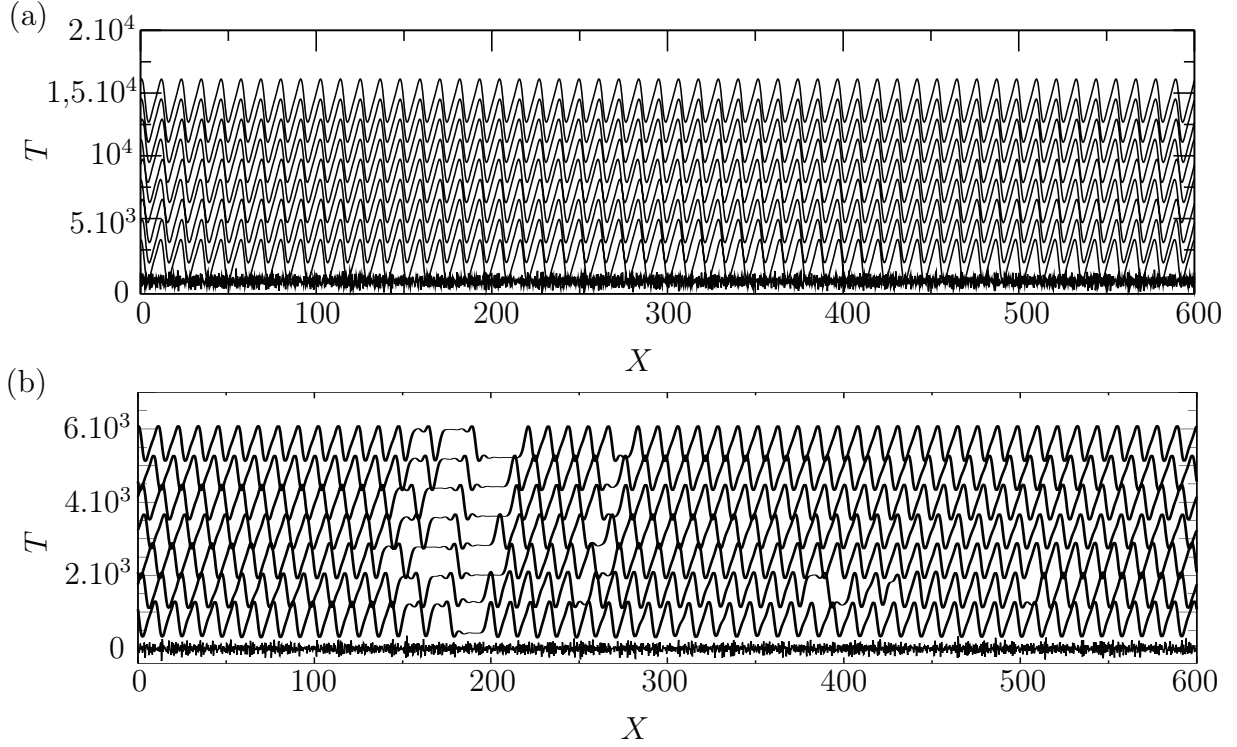


FIGURE 6.6 – (a) Evolution du profil de la membrane translaté en fonction du temps pour $V_c = 1, 5$. (b) Idem pour $V_c = 1, 75$.

qui décrit de nombreux systèmes tels que la croissance cristalline [5], les plasmas [6] ou l'évolution des fronts de flamme [91]. Le terme stabilisant ($-\partial_x^4 u$ pour (KS)) est de deux ordres plus élevés pour notre problème. Le terme déstabilisant lui est le même dans les deux équations. La relation de dispersion pour Kuramoto-Sivashinsky est

$$\omega = q^2 - q^4 \quad (6.19)$$

qui est très similaire à la relation de dispersion (6.13) de notre problème. Le taux d'accroissement ω est nul en 0 et négatif pour les petites longueurs d'onde (q grand) dans les deux cas. De plus, le taux d'accroissement montre un maximum comme pour notre problème, la longueur d'onde correspondante sera alors également privilégiée dans la dynamique.

L'équation de Kuramoto-Sivashinsky est connue pour donner lieu à du chaos spatio-temporel. Nous avons également observé dans nos simulations ce qui semble être du chaos bien que nous ne l'ayons pas montré de manière rigoureuse. Les résultats des simulations représentés sur la figure 6.7 ont été réalisées avec les variables pour lesquelles tous les préfacteurs sont égaux à 1

$$\partial_{\tilde{T}} \tilde{H} = \partial_{\tilde{X}}^6 \tilde{H} - \partial_{\tilde{X}} \tilde{H} - \tilde{H} \partial_{\tilde{X}} \tilde{H}, \quad (6.20)$$

avec $\tilde{X} = [-U'''(\bar{H})]^{1/4} X$, $\tilde{T} = (1 - \bar{H}^2)^3 [-U'''(\bar{H})]^{3/2} T$ et $\tilde{H} = (1 - \bar{H}^2)^{-3} [-U'''(\bar{H})]^{-5/4} \tilde{H}$. Dans les simulations de l'équation (6.20), nous observons une membrane très fluctuante avec une taille de domaines caractéristique qui apparaît. Cette taille est très proche de la longueur d'onde la plus instable $\tilde{\lambda}_m = 2\pi 3^{1/4} \approx 8, 27$. $\tilde{\lambda}_m$ est représentée par le trait noir sur la figure 6.7.

6.1. DYNAMIQUE DE LA MEMBRANE

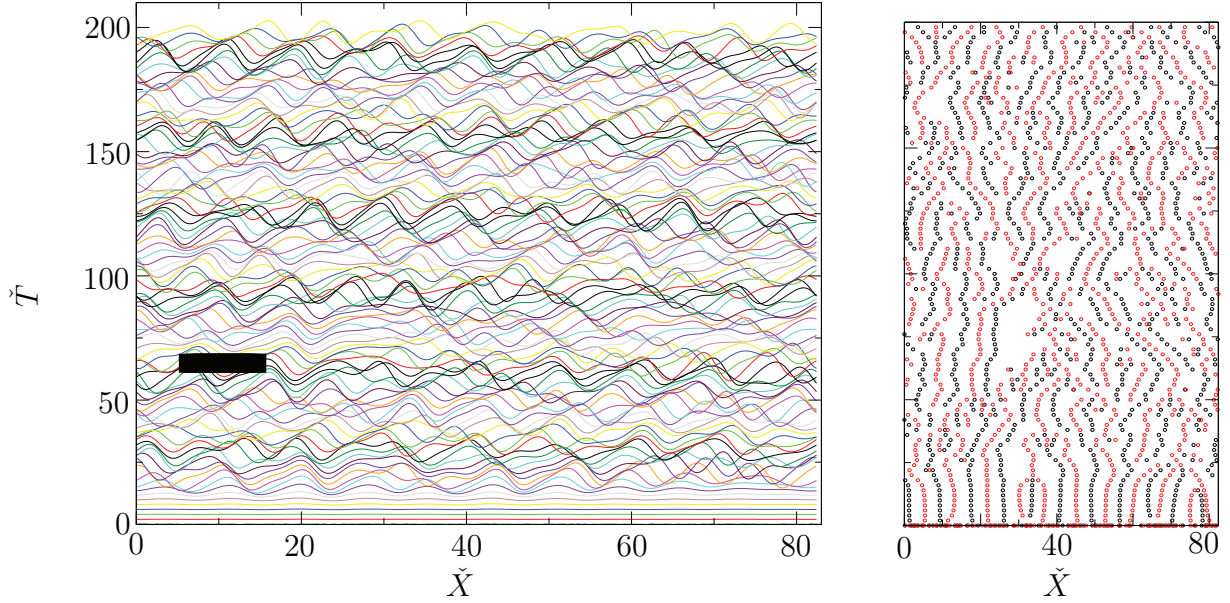


FIGURE 6.7 – À gauche évolution de \tilde{H} en fonction du temps. Ce sont différents profils de la membrane à des temps donnés qui sont translatés avec le temps. Le trait noir représente la taille de λ_m . À droite, la trajectoire des zéros pour la même simulation. Les points noirs correspondent aux zéros avec une pente positive et les points rouges aux zéros avec une pente négative.

6.1.4 Transition du mûrissement vers les états cellulaires périodiques

Nous venons de présenter les résultats des simulations pour les différentes vitesses de cisaillement, nous allons désormais tenter d'expliquer les transitions entre les différents régimes. Trois régimes ont aussi été observés par A.A. Golovin et al [31] pour l'équation de Cahn-Hilliard convective

$$\partial_T H = -\partial_{XX}(\partial_X^2 H - U'(H)) - VH\partial_X H, \quad (6.21)$$

qui peut modéliser par exemple la décomposition spinodale dans un champ externe ou la croissance cristalline en présence de facettes [31]. À faibles V , A.A. Golovin et al observent également du mûrissement, la longueur du système croît en T^α avec $\alpha \approx 0,45$. Pour des vitesses intermédiaires, il y a deux régimes. Un premier où les solutions sont périodiques et la dynamique est gelée et un second où les états ne sont pas parfaitement périodiques et où le système dérive en bloc. Enfin, dans la limite des grands V , l'évolution est régie par l'équation de Kuramoto-Sivashinsky dont la dynamique est du chaos spatiotemporel.

Ce type de transitions peut aussi être observée dans d'autres types de problèmes. Par exemple F. Hausser et A. Voigt [33] observent ces trois régimes pour les cristaux facettés thermodynamiquement instables. Enfin, une transition entre du mûrissement et une dynamique gelée a aussi été mise en évidence par F. Barakat, K. Martens et O. Pierre-Louis [4] pour le facettage d'un cristal sous électromigration.

Des modèles de kinks ont été développés pour l'équation de Cahn-Hilliard convective,

CHAPITRE 6. CISAILLEMENT D'UNE MEMBRANE 1D CONFINÉE ENTRE DEUX MURS PLANS IMPERMÉABLES

par exemple le modèle de S.J. Watson et al [102]. Nous nous sommes donc naturellement demandés si il était possible de développer ce genre de modèle pour notre problème. Nous avons d'abord essayé d'appliquer le modèle de Watson et al à notre système sans réel succès. Ce modèle ne permet pas entre autres de retrouver l'apparition des paires de plateaux que nous observons dans le régime des faibles vitesses de cisaillement. Mais une question non triviale d'abord posée dans l'article de C.L. Emmott et A.J. Bray [27] est de définir de manière rigoureuse les kinks en présence de cisaillement.

De par la brisure de la symétrie $x \leftrightarrow -x$ induite par le cisaillement, les kinks et les antikinks n'ont plus la même queue, contrairement au cas du cisaillement nul. C.L. Emmott et A.J. Bray [27] s'intéressent à l'équation (6.21). Il s'agit donc du cisaillement d'une membrane avec une tension de surface et sans rigidité de courbure dans le cas conservé. Ils trouvent que les solutions stationnaires de kink avec un seul zéro pour $V_c > 0$, c'est-à-dire les solutions qui vérifient $H(-\infty) < 0$ et $H(+\infty) > 0$, sont uniques pour une vitesse de cisaillement donnée et valent

$$H(X) = H_m \left(1 + \frac{V_c}{2^{1/2}} \right) \tanh \left[H_m \left(1 + \frac{V_c}{2^{1/2}} \right) \frac{X}{2^{1/2}} \right]. \quad (6.22)$$

En revanche, les solutions d'antikinks ($H(-\infty) > 0$ et $H(+\infty) < 0$) sont elles infinies pour une vitesse V_c donnée. Toutes les hauteurs dans un intervalle donné sont possibles. Ce phénomène rend difficile la définition rigoureuse d'un antikink. Nous observons la même chose dans notre cas pour l'équation (6.11), nous avons une infinité d'hauteurs d'antikink $H_{antikink}$ possibles pour une vitesse V_c donnée (voir (b) figure 6.8). Or dans le modèle de S.J. Watson et al, la hauteur des antikinks est prise constante.

Cependant, nous pouvons tout de même déduire des résultats à partir des hauteur des kinks H_{kink} . Sur la figure 6.8 en (c), nous avons tracé la hauteur des kinks en fonction de la vitesse de cisaillement V_c . Pour les faibles vitesses, cette hauteur se trouve dans la zone de stabilité d'une membrane plane (i.e. $U'' > 0$, voir (a) de la figure 3.3). Les paires de plateaux sont donc stables si nous supposons que leur hauteur est celle du kink. Cette hauteur diminue si V_c augmente jusqu'à arriver dans la zone où une membrane plane est instable. Les plateaux des bulles ne sont donc plus stables. La limite est atteinte pour $V_c \approx 0,87$ qui correspond approximativement aux vitesses délimitant le régime des faibles vitesses du régime des vitesses intermédiaires (0,5-0,9) trouvés par simulation. Le passage de la hauteur des kinks dans la zone instable pourrait donc expliquer le passage du régime de mûrissement au régime d'états cellulaires.¹

Nous n'avons en revanche pas de prédiction pour la transition du régime d'états cellulaires au régime chaotique.

6.2 Force de friction

Nous connaissons maintenant la dynamique de la membrane en fonction de la vitesse de cisaillement, nous allons désormais nous intéresser aux forces de friction sur les murs. En

1. Cependant, pour nos simulations dans une boîte de taille finie, nous obtenons des kinks stables pour des vitesses supérieures à 0,87. Cela vient du fait que proche de la zone de stabilité, la longueur d'onde des instabilités tend vers l'infini, les effets de taille fini empêchent donc le développement des instabilités.

6.2. FORCE DE FRICTION

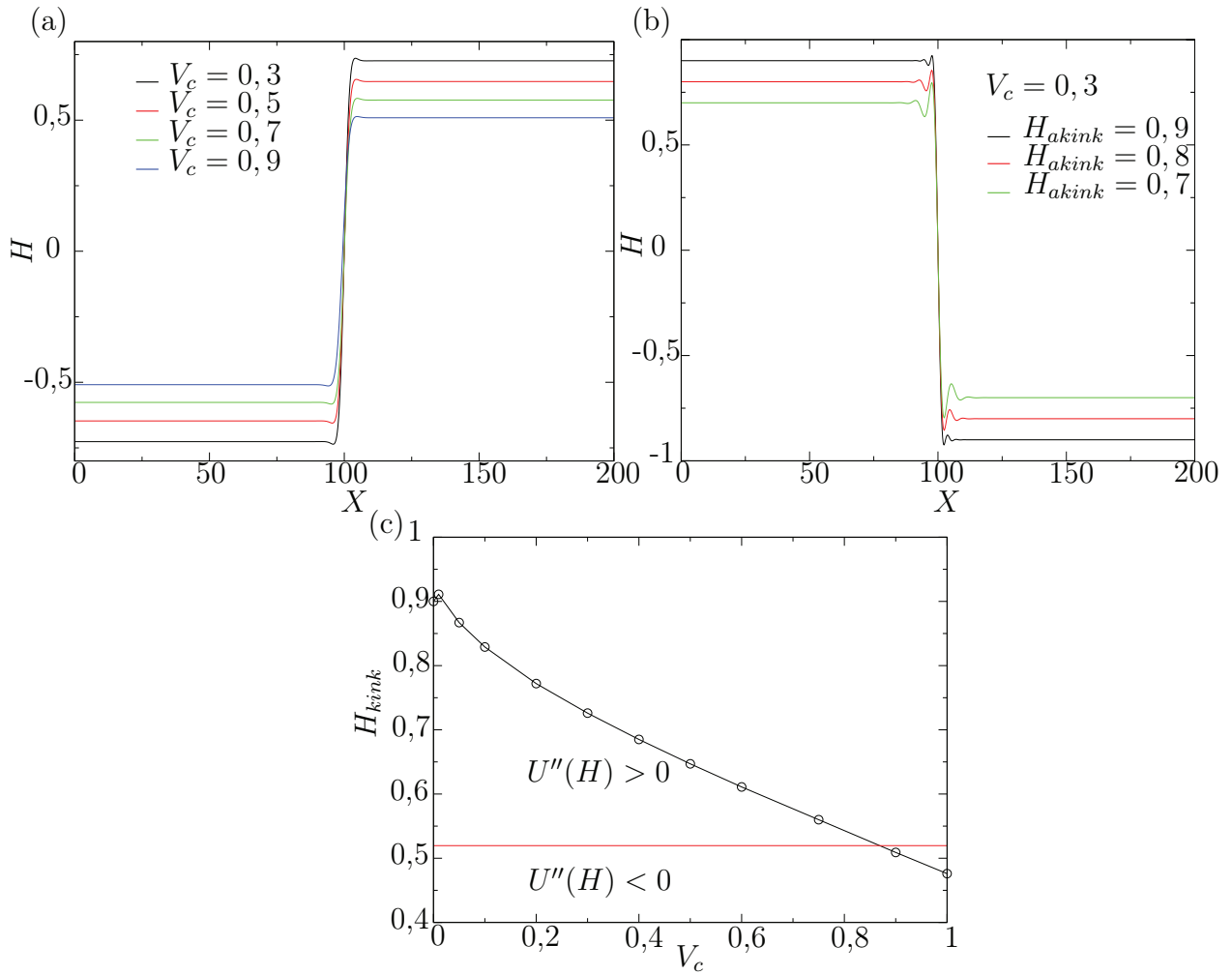


FIGURE 6.8 – (a) Profil d'un kink pour différentes vitesses de cisaillement. (b) Différents profils d'antikink pour une même vitesse de cisaillement, $V_c = 0,3$. (c) Evolution de la hauteur des kinks H_{kink} en fonction de la vitesse V_c .

CHAPITRE 6. CISAILLEMENT D'UNE MEMBRANE 1D CONFINÉE ENTRE DEUX MURS PLANS IMPERMÉABLES

effet, comme mentionné dans l'introduction, les membranes lipidiques pourraient avoir un rôle dans les faibles frottements des différents systèmes de biolubrification (genou, paupière,...). L'étude de la tribologie de notre système pourrait apporter des réponses. Nous allons donc nous intéresser à l'évolution des frottements en fonction de la vitesse v_c .

6.2.1 Expression de la force de friction

Les forces subies selon x par les murs sont de nature visqueuse, ceux-ci n'étant en contact qu'avec le fluide. La force totale par unité de longueur subie par le système est définie par

$$\Sigma f_{fr} = \frac{\mu}{\mathcal{L}} \int_0^{\mathcal{L}} dx \left(\partial_z v_{x+}|_{z=h_0} + \partial_z v_{x-}|_{z=-h_0} \right), \quad (6.23)$$

où la contribution sur le mur du dessus et celle sur le mur du dessous sont sommées. De même nous définissons la grandeur

$$\Delta f_{fr} = \frac{\mu}{\mathcal{L}} \int_0^{\mathcal{L}} dx \left(\partial_z v_{x+}|_{z=h_0} - \partial_z v_{x-}|_{z=-h_0} \right). \quad (6.24)$$

En remplaçant v_x par son expression (voir équation (2.25)) et en utilisant les résultats de l'appendice B.1 nous obtenons

$$\Delta f_{fr} = \frac{\mu}{\mathcal{L}} \int_0^{\mathcal{L}} dx \left(\frac{h_0}{\mu} \partial_x \Sigma p + \Delta a \right) = -\frac{1}{\mathcal{L}} \int_0^{\mathcal{L}} dx h \partial_x f_n, \quad (6.25)$$

par périodicité des conditions aux limites. En remplaçant f_n par son expression (2.43), la contribution Δf_{fr} est nulle, la même force $\Sigma f_{fr}/2$ s'applique sur chacun des murs. Nous pouvons ensuite calculer

$$\Sigma f_{fr} = \frac{\mu}{\mathcal{L}} \int_0^{\mathcal{L}} dx \left(\frac{h_0}{\mu} \partial_x \Delta p + \Sigma a \right) = 2 \frac{\mu}{h_0} v_c + \frac{1}{\mathcal{L}} \int_0^{\mathcal{L}} dx \frac{h_0}{2} \left(1 - \frac{h^2}{h_0^2} \right) \partial_x f_n. \quad (6.26)$$

Cette force est la somme de deux termes, le premier qui serait la force sans la membrane et qui représente la dissipation visqueuse dans un cisaillement pur. Il est directement proportionnel à la vitesse de cisaillement v_c . Le deuxième terme ne dépend que de la forme de la membrane et permet de quantifier directement l'effet de la membrane sur les frottements. En variables normalisées cette force s'écrit

$$\Sigma F_{fr} = 2V_c + \frac{24}{L} \int_0^L dX \frac{1}{2} (1 - H^2) \partial_X F_n \quad (6.27)$$

avec $\Sigma F_{fr} = (24\kappa^{1/4} h_0^{1/2} / \mathcal{U}_0^{5/4}) \Sigma f_{fr}$. Nous mettons ΣF_{fr} sous la forme

$$\Sigma F_{fr} = 2V_c + \Sigma F_{mem}, \quad (6.28)$$

en appelant ΣF_{mem} la contribution de la membrane aux frottements. C'est-à-dire la différence entre la force de friction avec membrane et sans membrane. Nous définissons la viscosité effective

$$\mu_{eff} = \frac{\Sigma F_{fr}}{2V_c} = 1 + \frac{\Sigma F_{mem}}{2V_c} \quad (6.29)$$

6.2. FORCE DE FRICTION

afin d'étudier la lubrification du système.

Si la membrane se situe dans une zone linéairement stable ($U''(\bar{H}) > 0$) alors elle va tendre à être plane et donc sa contribution à la force de friction sera nulle. L'étude de la force faite par la suite n'est valable que dans le cas où $U''(\bar{H}) < 0$.

6.2.2 Evolution de la force en fonction de la vitesse de cisaillement

Nous avons obtenu numériquement le profil de la contribution de la membrane ΣF_{mem} à la force totale de friction pour $\bar{H} = 0$ en fonction de la vitesse de cisaillement V_c , la courbe est tracée sur la figure 6.9 en (a). Tous les points de cette figure ont été obtenus avec des simulations où les conditions initiales sont aléatoires et où la hauteur moyenne \bar{H} est nulle. Les zones de transition sont indiquées par des traits rouges.

Premièrement, cette force croît jusqu'au régime des états cellulaires. Attention cependant, pour les très faibles vitesses, la dynamique étant du mûrissement très lent, les points représentés ne correspondent pas à un état final. Ces valeurs devraient diminuer avec le temps comme représenté en (c) sur la figure 6.9. Comme nous le voyons dans l'équation (6.27), ΣF_{mem} est proportionnel à l'intégrale sur tout le système de $(1 - H^2)\partial_X F_n$. Nous pouvons donc dire d'après l'expression de la force normale (6.9) que pour une membrane plane, la contribution ΣF_{mem} est strictement nulle. Plus il y aura de plateaux et plus la force sera faible. Pour une dynamique de mûrissement, le nombre de kinks diminue avec le temps et la force va donc diminuer avec le temps. Cette diminution de la contrainte avec le temps s'appelle la thixotropie. De plus, comme pour ce régime il y a deux états possibles aux temps longs, la valeur asymptotique peut sans doute avoir deux valeurs possibles.

De plus, après la zone de transition entre le mûrissement et les états cellulaires, la force diminue avec V_c . Cela vient du fait que l'amplitude des oscillations de la membrane diminue avec la vitesse de cisaillement, les forces viqueuses du fluide sur les murs sont alors plus faibles. Nous avons un comportement rhéofluidifiant.

6.2.3 Limite des grandes vitesses

Nous étudions ici le comportement de la force ΣF_{fr} dans la limite des grandes vitesses de cisaillement. Nous reprenons les notations de la sous-section 6.1.3, la hauteur de la membrane se développe de la manière suivante

$$H = \bar{H} + \frac{\tilde{H}}{V_c} \quad (6.30)$$

avec \bar{H} la hauteur moyenne de la membrane et \tilde{H} une grandeur de l'ordre de l'unité. La force normale subie par la membrane vaut dans ces variables

$$F_n = -\partial_X^4 \frac{\tilde{H}}{V_c} - U' \left(\bar{H} + \frac{\tilde{H}}{V_c} \right). \quad (6.31)$$

La force de friction due à la membrane à l'ordre le plus faible est donc égale à

$$\Sigma F_{mem} = \frac{24}{L} \int_0^L dX \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tilde{H}^2}{V_c^2} \right) \left(-\partial_X^5 \frac{\tilde{H}}{V_c} - U''(\bar{H}) \partial_X \frac{\tilde{H}}{V_c} \right). \quad (6.32)$$

CHAPITRE 6. CISAILLEMENT D'UNE MEMBRANE 1D CONFINÉE ENTRE DEUX MURS PLANS IMPERMÉABLES

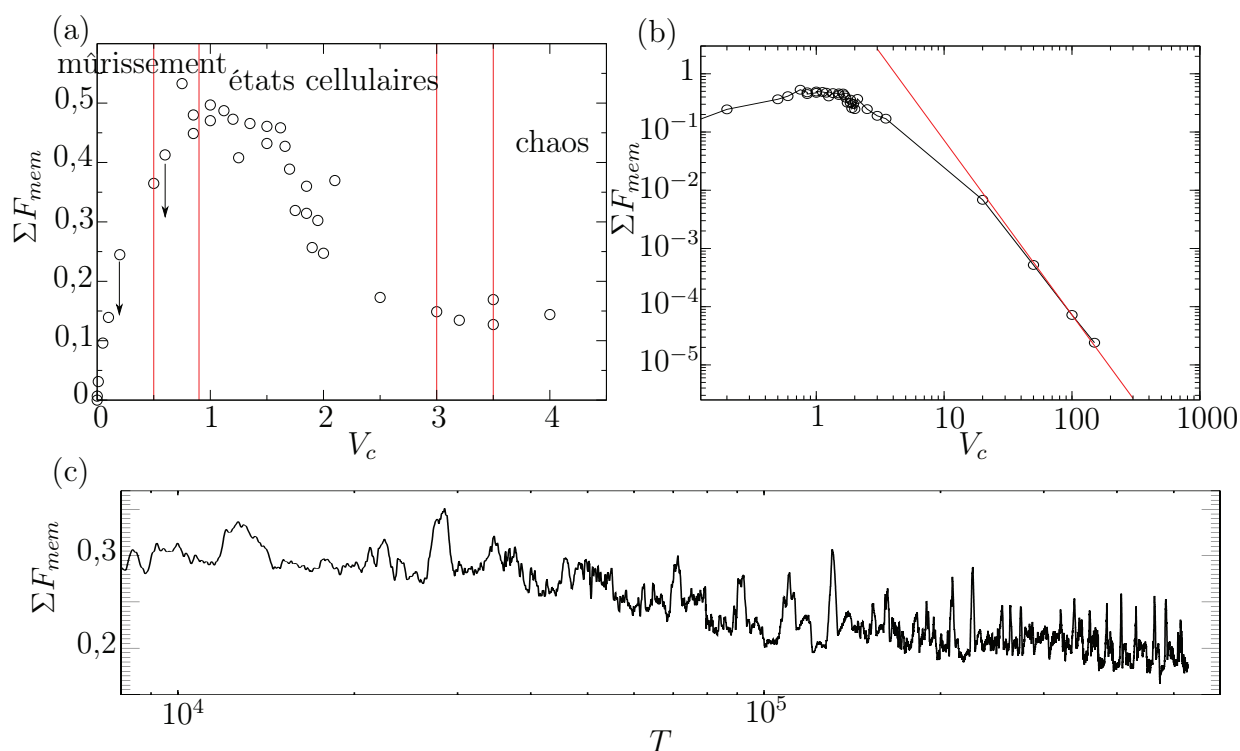


FIGURE 6.9 – (a) Contribution de la membrane ΣF_{mem} aux frottements en fonction de V_c . Les résultats ont été obtenus pour des simulations aux conditions initiales aléatoires et pour $\bar{H} = 0$. Les zones de transition sont repérées par les lignes rouges. (b) ΣF_{mem} en fonction de V_c en échelle log-log. Les points noirs sont les résultats de simulations et la courbe rouge est la fonction $y = 72/x^3$ représentant le comportement aux grandes vitesses. (c) Evolution de ΣF_{mem} en fonction du temps pour $V_c = 0,3$ en échelle lin-log.

6.2. FORCE DE FRICTION

En considérant des conditions aux limites périodiques et par intégration par parties, il ne reste plus que

$$\Sigma F_{mem} = -\frac{24}{L} \frac{1}{V_c^3} \int_0^L dX \tilde{H} \partial_X \tilde{H} \partial_X^4 \tilde{H} \quad (6.33)$$

à l'ordre dominant. Dans les zones instables, ($U''(\bar{H}) < 0$) où l'équation d'évolution (6.20) ressemble à celle de Kuramoto-Sivashinsky, la force peut s'exprimer de la manière suivante

$$\Sigma F_{mem} = -24 \frac{(1 - \bar{H}^2)^9}{V_c^3} \frac{U''(\bar{H})^5}{\tilde{L}} \int_0^{\tilde{L}} d\tilde{X} \tilde{H} \partial_{\tilde{X}} \tilde{H} \partial_{\tilde{X}}^4 \tilde{H} = -24 \frac{(1 - \bar{H}^2)^9}{V_c^3} U''(\bar{H})^5 \Gamma, \quad (6.34)$$

où \tilde{H} est la variable vérifiant l'équation (6.20) et \tilde{X} l'abscisse correspondante. Cette force s'exprime en variables physiques

$$\Sigma f_{mem} = -\frac{h_0^{11} \mathcal{U}''(\bar{h})^5}{24^4 \mu^3 \kappa} \Gamma \frac{1}{v_c^3}. \quad (6.35)$$

Numériquement, nous trouvons que

$$\Gamma = \frac{1}{\tilde{L}} \int_0^{\tilde{L}} d\tilde{X} \tilde{H} \partial_{\tilde{X}} \tilde{H} \partial_{\tilde{X}}^4 \tilde{H} \approx 8,6, \quad (6.36)$$

après un court régime transitoire. Pour une hauteur moyenne nulle nous avons donc $\Sigma F_{mem} \approx 72/V_c^3$. La courbe $y = 72/x^3$ est tracée en rouge sur la figure 6.9 en (b) et elle représente bien le comportement de ΣF_{mem} pour les grandes vitesses de cisaillement. La partie de la force de friction due à la présence de la membrane décroît bien en V_c^{-3} pour les grandes vitesses.

Revenons sur l'intégrale $(1/\tilde{L}) \int_0^{\tilde{L}} d\tilde{X} \tilde{H} \partial_{\tilde{X}} \tilde{H} \partial_{\tilde{X}}^4 \tilde{H}$. Par simulation nous trouvons que cette grandeur est une constante du temps. Nous pouvons tenter de comprendre ce résultat par une argumentation grossière. Comme nous l'avons mentionné dans la sous-section 6.1.3, la variable \tilde{H} vérifie une équation très proche de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky appliquée à la dérivée $\partial_x u = h$ (KS') (voir équation (6.18)). Ces deux équations ne diffèrent que par le terme stabilisant qui est une dérivée d'ordre 4 pour KS' et une dérivée d'ordre 6 pour l'équation vérifiée par \tilde{H} . Cette différence va avoir une influence sur le comportement à petite échelle mais pas sur le comportement moyen à grande échelle, la forme exacte du terme stabilisant ne joue pas de rôle majeur comme suggéré par les études de ce genre d'équations par le groupe de renormalisation [72]. Nous supposons donc que le comportement moyen à temps long est le même. De plus, il est admis que KS (6.17) à 1D se comporte comme l'équation de Kardar-Parisi-Zhang aux grandes échelles [3, 46, 92]

$$\partial_t u = \partial_{xx} u + (\partial_x u)^2 + \eta(x, t) \quad (6.37)$$

avec η un bruit blanc, bien qu'il n'existe pas de démonstration rigoureuse de ce résultat. Pour cette équation la fonction de corrélation de la transformée de fourier $TF[u]$ se comporte de la manière suivante

$$\langle TF[u](q, t) TF[u](-q, t) \rangle = \frac{A}{L q^2} g(q^z t) \quad (6.38)$$

CHAPITRE 6. CISAILLEMENT D'UNE MEMBRANE 1D CONFINÉE ENTRE DEUX MURS PLANS IMPERMÉABLES

où A est une constante, L la taille du système, g une fonction qui vérifie $g(x) \sim x$ si $x \rightarrow 0$ et $g(\infty) = 1$ et z un nombre positif. Appliqué à notre problème, cela donne

$$\langle TF[\check{H}](q, t) TF[\check{H}](-q, t) \rangle = \frac{A}{\check{L}} g(q^z t), \quad (6.39)$$

nous rappelons que \check{H} joue le rôle de $\partial_x u$. Nous en déduisons la rugosité de la membrane

$$\langle \check{H}^2 \rangle \propto \int dq g(q^z t). \quad (6.40)$$

Par changement de variable $f = q^z t$ cela devient

$$\langle \check{H}^2 \rangle \propto \frac{1}{z t^{1/z}} \int df \frac{1}{f^{1-1/z}} g(f). \quad (6.41)$$

Cette intégrale diverge à petite échelle car $1 - 1/z < 1$, il est donc nécessaire d'imposer une longueur d'onde de coupure λ_c en dessous de laquelle le système n'est pas bien décrit par l'équation (6.20). La longueur d'onde λ_m de l'instabilité linéaire est un candidat naturel pour cette longueur de coupure. De plus, g tend vers 1 pour les temps longs, nous en déduisons que pour $t \rightarrow \infty$

$$\langle \check{H}^2 \rangle \propto \frac{1}{\lambda_c}. \quad (6.42)$$

La rugosité de la membrane tend donc vers une constante comme représenté sur la figure 6.10 en (a). Nous faisons maintenant l'approximation grossière que

$$\langle \check{H} \partial_{\check{X}} \check{H} \partial_{\check{X}}^4 \check{H} \rangle \propto \int dq q^5 g(q^z t)^{3/2} \quad (6.43)$$

simplement en comptabilisant le nombre total de dérivées (q^5) et de \check{H} ($g(q^z t)^{3/2}$). En reprenant le changement de variable $f = q^z t$, nous avons une fois de plus une divergence à petite échelle, mais en imposant de nouveau une longueur d'onde de coupure, nous trouvons bien que

$$\langle \check{H} \partial_{\check{X}} \check{H} \partial_{\check{X}}^4 \check{H} \rangle = \text{constante}. \quad (6.44)$$

L'évolution de cette grandeur avec le temps est tracée en (b) sur la figure 6.10.

6.2.4 Rhéofluidification et stick-slip

Dans cette sous-section nous nous intéressons au comportement de la force totale $F_{fr} = 2V_c + F_{mem}$. Les systèmes rhéofluidifiants sont caractérisés par le fait que leur viscosité effective μ_{eff} (voir équation (6.29)) diminue avec la vitesse de cisaillement. Nous voyons sur la figure 6.9 que la contribution de la membrane ΣF_{mem} diminue avec V_c dès que le régime des états cellulaires est atteint, le deuxième terme qui apparaît dans la force de friction ΣF_{fr} étant proportionnel à V_c il ne fait que rajouter une constante, nous avons bien diminution de la viscosité effective et donc un système rhéofluidifiant.

Pour le potentiel que nous avons utilisé jusqu'ici

$$U(H) = \frac{H^4}{4} - H_m^2 \frac{H^2}{2} \quad (6.45)$$

6.2. FORCE DE FRICTION

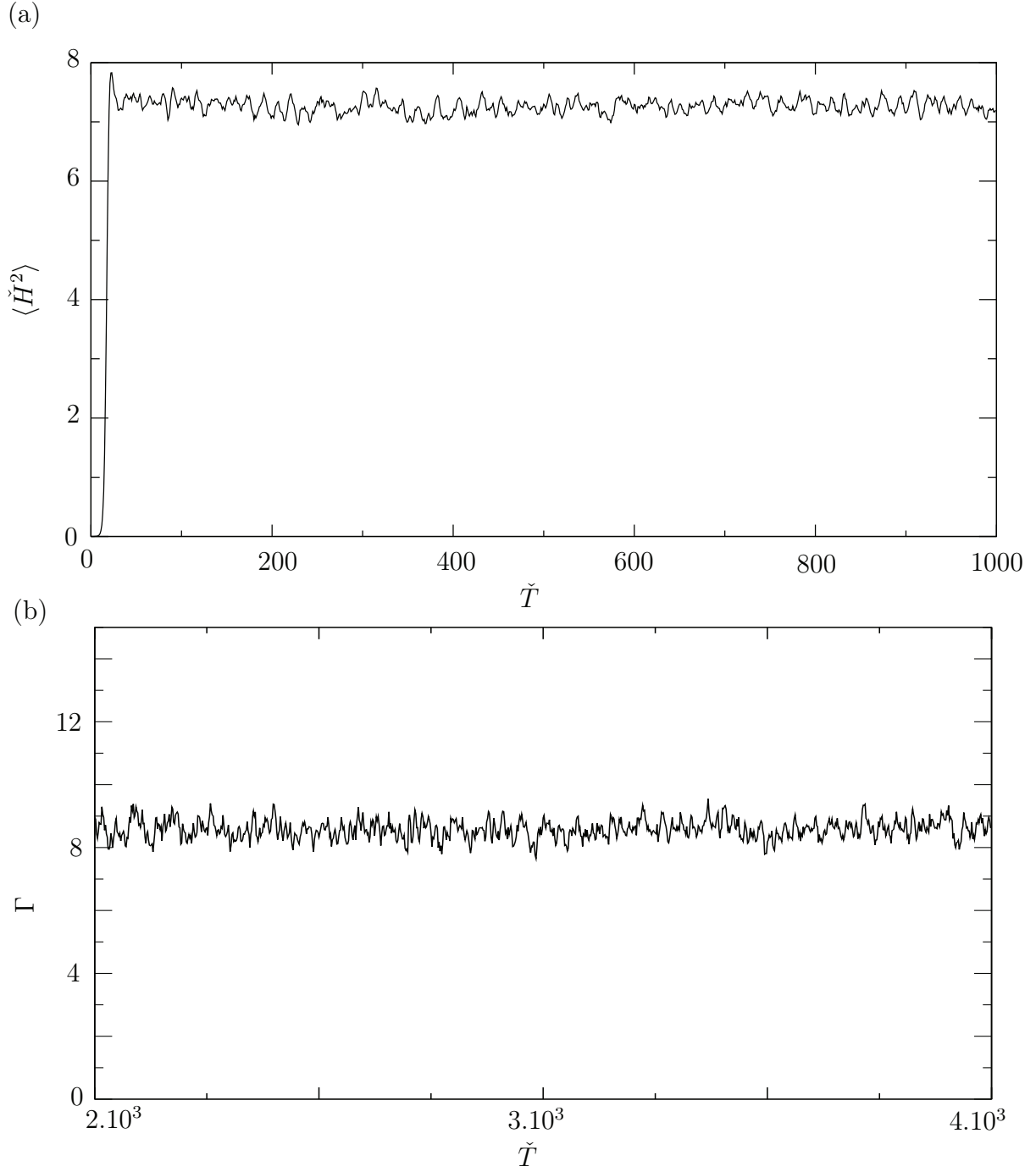


FIGURE 6.10 – (a) Evolution de $\langle \check{H}^2 \rangle$ en fonction du temps pour un système de taille 10000. (b) Evolution de la grandeur Γ en fonction du temps pour un système de taille 10000

CHAPITRE 6. CISAILLEMENT D'UNE MEMBRANE 1D CONFINÉE ENTRE DEUX MURS PLANS IMPERMÉABLES

avec $H_m = 0,9$, l'intensité de ΣF_{mem} n'est pas suffisamment forte par rapport au terme linéaire en V_c pour avoir un effet significatif sur la viscosité effective, comme indiqué par les cercles rouges dans la figure 6.11. Il faut donc augmenter l'influence de la membrane sur la friction. Tout d'abord, plus la membrane est proche des murs et plus il y a de frottement visqueux. La première manière d'augmenter la friction est donc de rapprocher les minimums du potentiel des murs. Nous voyons de plus dans l'équation de (6.27) que seule la dérivée de F_n apparaît et donc les dérivées cinquième et première de H . En augmentant les pentes de la membrane nous pourrions augmenter la friction due à la membrane. Pour cela nous pouvons imaginer par exemple de diminuer la longueur d'onde la plus instable

$$\lambda_m = 2\pi \left(\frac{-3}{U''(0)} \right)^{1/4}. \quad (6.46)$$

Nous voyons clairement que si la dérivée seconde du potentiel en zéro augmente alors la longueur d'onde typique du système va diminuer.

Nous avons essayé plusieurs potentiels afin d'augmenter l'effet de la membrane. Nous avons d'abord augmenté H_m jusqu'à même prendre H_m supérieur à 1 (i.e. les minimums du potentiel sont au-delà des murs). Puis nous n'avons gardé que la partie quadratique du potentiel en rajoutant un terme $\propto 1/(1 - H^2)$ répulsif proche des bords. Pour augmenter la dérivée seconde du potentiel en 0 nous avons essayé un potentiel gaussien mais sans succès. Finalement, nous n'avons gardé que le terme quadratique du potentiel. C'est avec ce dernier potentiel que l'influence de la membrane a été la plus élevée. Nous avons tracé la force correspondante sur la figure 6.11 où le potentiel est $U(H) = -H_m^2 H^2/2$ avec $H_m^2 = 2, 4$. Bien qu'il n'y ait pas de partie répulsive dans ce potentiel, la membrane ne dépasse pas les murs. Cela est dû au terme de mobilité $(1 - H^2)^3$ qui représente la dissipation visqueuse lorsque la membrane s'approche des murs. De plus, comme la dérivée seconde du potentiel est toujours négative, nous n'observons pas le régime de mûrissement pour les petits cisaillements, car les solutions constantes ne sont jamais stables linéairement. Cependant pour les faibles vitesses, le régime est chaotique au début de la dynamique, le système ne se stabilise pas immédiatement et le temps de relaxation semble augmenter quand la vitesse diminue. Les trois premiers points sur la figure 6.11 présentent des dynamiques qui ne sont pas encore stabilisées.

Nous voyons sur la figure 6.11 que ΣF_{fr} comporte un plateau pour V_c allant de 3 à 5 environ. Nous ne sommes pas parvenu à obtenir un potentiel qui donne une pente négative, la possibilité d'une inversion de la pente reste une question ouverte. Si la pente devenait négative, le système pourrait présenter une instabilité de type stick-slip lorsqu'il est sollicité dans un dispositif où la vitesse n'est plus imposée.

6.2. FORCE DE FRICTION

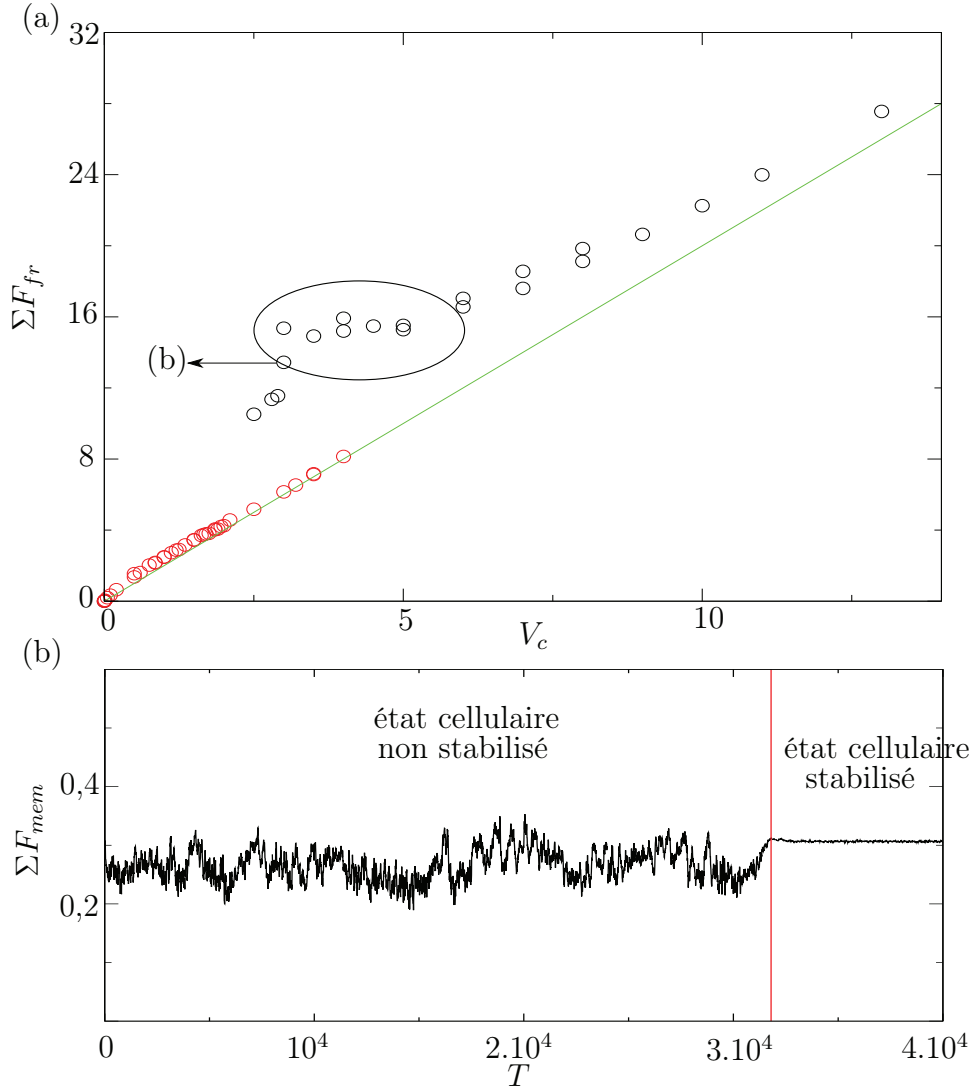


FIGURE 6.11 – (a) Les cercles noirs représentent ΣF_{fr} obtenu par simulation en fonction de V_c pour $U(H) = -H_m^2 H^2/2$ avec $H_m^2 = 2, 4$ et $\bar{H} = 0$ et les cercles rouges représentent ΣF_{fr} obtenue de la même manière avec $U(H) = H^4/4 - H_m^2 H^2/2$ et $H_m = 0, 9$. La ligne verte correspond à $y = 2x$. (b) L'évolution de ΣF_{mem} avec le temps pour $V_c = 3$ et le potentiel parabolique. Cela correspond au cercle d'où part la flèche en (a).

Chapitre 7

Extension du problème d'adhésion à une membrane bidimensionnelle

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des membranes unidimensionnelles. Ce problème est plus simple à étudier que la membrane bidimensionnelle et nous a permis de mieux comprendre l'effet de la rigidité de courbure. Cependant nous perdons une partie de la physique en nous restreignant à une membrane 1D. Il est donc nécessaire d'étendre notre étude à une membrane bidimensionnelle et de traiter le problème dans l'espace à trois dimensions afin de se rapprocher des expériences sur les membranes lipidiques. Dans ce chapitre nous allons présenter le système tridimensionnel et montrer les premiers résultats obtenus.

De plus, nous prendrons en compte l'inextensibilité de la membrane, qui contraint fortement la dynamique. Finalement, dans un souci de généralité, nous considérons aussi un substrat rugueux de forme arbitraire. Cependant, nous ne présentons ici que les résultats numériques préliminaires pour l'adhésion sans cisaillement entre deux murs plans et perméables.

7.1 Système étudié

Le problème considéré ici est le cas général d'une membrane confinée entre deux murs rugueux avec une perméabilité ν et des conditions aux limites périodiques. Les notations seront les mêmes que précédemment en rajoutant celles de la sous-section 1.4.3 dont les résultats seront repris. Aux coordonnées spatiales est rajoutée la coordonnée horizontale y transverse à x . Les précédentes fonctions de x deviennent alors des fonctions du doublet (x, y) . De même que pour une membrane 1D, nous commencerons par présenter le problème dans les variables physiques et passerons en variables normalisées plus tard.

7.1.1 Forces en présence

Nous présentons en premier les différentes forces qui vont agir sur la membrane et ainsi contribuer à sa dynamique. Tout d'abord, il y a de même que pour la membrane 1D, l'énergie de courbure de la membrane décrite dans la sous-section 1.4.3 et le potentiel $\mathcal{U}(\mathbf{r})$ créé par les murs. Le potentiel dépend de la position \mathbf{r} car nous considérons dans un

CHAPITRE 7. EXTENSION DU PROBLÈME D'ADHÉSION À UNE MEMBRANE BIDIMENSIONNELLE

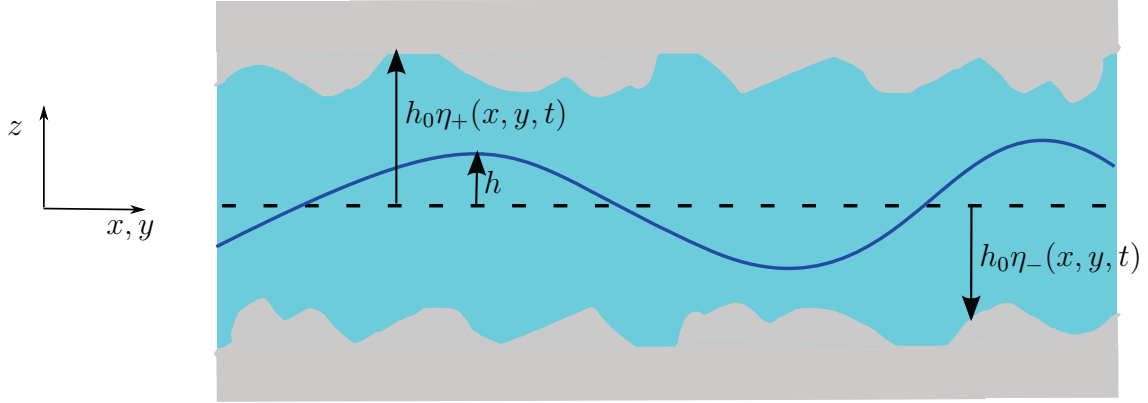


FIGURE 7.1 – Schéma du système dans le cas des murs rugueux. La hauteur du mur du dessus est repérée par $h_0\eta_+$ et celle du mur du dessous par $h_0\eta_-$.

premier temps le cas général des murs rugueux. Dans le cas des murs plans ce potentiel ne dépend que de la hauteur h .

Une contribution énergétique supplémentaire est rajoutée pour l'étude d'une membrane bidimensionnelle afin d'assurer la conservation locale de l'aire de la membrane. En nous inspirant de la littérature et introduisons un multiplicateur de Lagrange Σ qui dépendra des variables internes à la membrane s_1 et s_2 [88, 100]. Sa contribution à l'énergie s'écrit

$$\mathcal{E}_{\Sigma} = \iint d\mathcal{A} \Sigma(s_1, s_2). \quad (7.1)$$

L'élément d'aire s'exprime $d\mathcal{A} = g^{1/2}ds_1ds_2$ où g est le déterminant du tenseur de la métrique (g_{ij}) avec $g_{ij} = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_j = \partial_{s_i} \mathbf{r} \cdot \partial_{s_j} \mathbf{r}$.

L'énergie totale de la membrane s'exprime alors dans les variables physiques

$$\mathcal{E}_{mem} = \iint d\mathcal{A} \left(\frac{\kappa}{2} c^2 + \Sigma(s_1, s_2) + \mathcal{U}(\mathbf{r}) \right), \quad (7.2)$$

c est la courbure de la membrane et κ sa rigidité de courbure. Comme expliqué dans la sous-section 1.4.3, la contribution de la courbure gaussienne à l'énergie est négligée. La dérivée fonctionnelle de l'énergie de la membrane dont le calcul est détaillé dans l'annexe A.3 et dans la thèse de F. Divet ou le papier de O.Y. Zhong-Can et W. Helfrich [23, 104], s'écrit

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_{mem} = & \iint d\mathcal{A} \left[\kappa \left(\Delta_b c + \frac{c^3}{2} - 2cc_G \right) \mathbf{n} - (g^{ij} \partial_{s_i} \Sigma \partial_{s_j} \mathbf{r} + \Sigma c \mathbf{n}) + \nabla \mathcal{U}(\mathbf{r}) - g^{ij} \partial_{s_i} \mathcal{U}(\mathbf{r}) \partial_{s_j} \mathbf{r} \right. \\ & \left. + \mathcal{U}(\mathbf{r}) c \mathbf{n} \right] \cdot \delta \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

où $\Delta_b = g^{-1/2} \partial_j (g^{1/2} g^{ij} \partial_i)$ est le laplacien de Beltrami, le tenseur (g^{ij}) est l'inverse de la métrique, c_G la courbure gaussienne et \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à la membrane défini dans l'appendice A.1. La convention d'Einstein pour la sommation des indices est utilisée ici.

7.1. SYSTÈME ÉTUDIÉ

Il y a une contribution à la force par unité de surface normale à la membrane comme pour une membrane unidimensionnelle mais aussi une contribution tangentielle (nous rappelons que $\mathbf{t}_i = \partial_{s_i} \mathbf{r}$). Ces deux contributions s'expriment

$$\begin{cases} f_{t_j} = g^{ij} \partial_{s_i} (\Sigma + \mathcal{U}(\mathbf{r})) - \nabla \mathcal{U}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}_j, \\ f_n = -\kappa \left(\Delta_b c + \frac{c^3}{2} - 2cc_G \right) + (\Sigma + \mathcal{U}(\mathbf{r}))_c - \nabla \mathcal{U}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}. \end{cases} \quad (7.4)$$

$$(7.5)$$

La contribution due au multiplicateur de Lagrange dans la force normale f_n a la même forme que celle d'une tension de surface, Σ jouant le rôle de la tension. Σ peut être de signe positif ou négatif.

La conservation de l'aire totale au cours du temps impose

$$\partial_t g^{1/2} = 0, \quad (7.6)$$

qui, lorsque les notations de Monge peuvent être utilisées, peut se mettre sous la forme

$$\partial_t \rho_{2D} + \nabla_{2D} \cdot (\rho_{2D} \mathbf{v}_{2D}) = 0 \quad (7.7)$$

avec $\rho_{2D} = [1 + (\partial_x h)^2 + (\partial_y h)^2]^{1/2}$ la densité d'aire locale de la membrane par unité d'aire dans le plan (x, y) . L'opérateur ∇_{2D} est le divergent dans le plan horizontal (x, y) et $\mathbf{v}_{2D} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y$ est la vitesse d'un point de la membrane dans le plan horizontal (comme nous considérerons des conditions de non glissement aux bords de la membrane, la vitesse de la membrane est la même que celle du fluide). Nous avons une équation de conservation pour ρ_{2D} . Cette formulation est plus facilement interprétable physiquement que celle avec la métrique pour les membranes en représentation de Monge.

7.1.2 Equation d'évolution dans la limite de lubrification

Connaissant désormais l'énergie de la membrane et les différentes forces qui agissent sur elle, nous allons chercher à obtenir son équation d'évolution dans la limite de lubrification. La procédure est la même que pour la membrane unidimensionnelle, il faut d'abord définir les conditions aux limites. Nous avons en plus ici des murs rugueux, nous considérons de même que pour la membrane que les variations de la hauteur des murs se font sur de grandes échelles spatiales afin de rester dans le cadre de l'approximation de lubrification.

L'étude est faite dans la limite des petites pentes, donc la vitesse du fluide est toujours de la forme

$$\begin{cases} v_x = \frac{z^2}{2\mu} \partial_x p + a_x z + b_x, \\ v_y = \frac{z^2}{2\mu} \partial_y p + a_y z + b_y. \end{cases} \quad (7.8)$$

$$(7.9)$$

De plus les mêmes conditions aux limites pour la vitesse du fluide situé entre la membrane et les murs sont reprises. C'est-à-dire non glissement entre les murs et le fluide et entre la membrane et le fluide. Nous reprenons également la loi de perméabilité (équation (2.5))

CHAPITRE 7. EXTENSION DU PROBLÈME D'ADHÉSION À UNE MEMBRANE BIDIMENSIONNELLE

pour la vitesse normale du fluide au niveau des murs qui est égale à la vitesse selon z dans la limite de lubrification

$$v_{z\pm}|_{z=h_0\eta_{\pm}} = \pm\nu(p_{\pm} - p_{ext}), \quad (7.10)$$

où $h_0\eta_{\pm}$ est la hauteur du mur du dessus (+) ou du dessous (-), ν est la perméabilité des murs et p_{ext} la pression extérieure que nous considérons fixe. La différence par rapport au cas de la membrane unidimensionnelle vient de l'équilibre mécanique, car il y a désormais une force tangentielle à la membrane qui est non nulle. L'application du tenseur des contraintes aux vecteurs unitaires \mathbf{t}_i et \mathbf{n} donne

$$[(\bar{\bar{\tau}}_+ - \bar{\bar{\tau}}_-)|_{z=h}\mathbf{n}] \cdot \mathbf{t}_i = -f_{t_i}, \quad (7.11)$$

$$[(\bar{\bar{\tau}}_+ - \bar{\bar{\tau}}_-)|_{z=h}\mathbf{n}] \cdot \mathbf{n} = -f_n, \quad (7.12)$$

où $\bar{\bar{\tau}}_{ij} = \mu(\partial_i v_j + \partial_j v_i) - p\delta_{ij}$. Le système d'équations à résoudre est donc dans le cas d'une membrane 2D

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{x+}|_{z=h_0\eta_+} = 0, \\ v_{y+}|_{z=h_0\eta_+} = 0, \\ v_{x-}|_{z=h_0\eta_-} = 0, \\ v_{y-}|_{z=h_0\eta_-} = 0, \\ v_{x+}|_{z=h} = v_{x-}|_{z=h}, \\ v_{y+}|_{z=h} = v_{y-}|_{z=h}, \\ p_+ - p_- = f_n \simeq f_z, \\ \partial_z v_{x+}|_{z=h} - \partial_z v_{x-}|_{z=h} = -f_{t_1} \simeq -f_x, \\ \partial_z v_{y+}|_{z=h} - \partial_z v_{y-}|_{z=h} = -f_{t_2} \simeq -f_y, \\ j_x = j_{x-} + j_{x+}, \\ j_y = j_{y-} + j_{y+}, \end{array} \right. \quad (7.13)$$

$$v_{y+}|_{z=h_0\eta_+} = 0, \quad (7.14)$$

$$v_{x-}|_{z=h_0\eta_-} = 0, \quad (7.15)$$

$$v_{y-}|_{z=h_0\eta_-} = 0, \quad (7.16)$$

$$v_{x+}|_{z=h} = v_{x-}|_{z=h}, \quad (7.17)$$

$$v_{y+}|_{z=h} = v_{y-}|_{z=h}, \quad (7.18)$$

$$p_+ - p_- = f_n \simeq f_z, \quad (7.19)$$

$$\partial_z v_{x+}|_{z=h} - \partial_z v_{x-}|_{z=h} = -f_{t_1} \simeq -f_x, \quad (7.20)$$

$$\partial_z v_{y+}|_{z=h} - \partial_z v_{y-}|_{z=h} = -f_{t_2} \simeq -f_y, \quad (7.21)$$

$$j_x = j_{x-} + j_{x+}, \quad (7.22)$$

$$j_y = j_{y-} + j_{y+}, \quad (7.23)$$

où les coordonnées internes sont choisies de telle sorte que $\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_y = 0$ et $\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{e}_x = 0$ et où $j_{x,y}$ sont les composantes du débit de fluide \mathbf{j} selon la direction x, y respectivement. Nous posons

$$\mathbf{f}_{2D} = f_x \mathbf{e}_x + f_y \mathbf{e}_y. \quad (7.24)$$

La résolution de ce système d'équations est détaillée dans l'annexe B.2 et donne l'équation d'évolution suivante dans la limite de lubrification

$$\partial_t h = -\nabla_{2D} \cdot [M_z \nabla_{2D} f_z + M_{xy} \mathbf{f}_{2D} + M_j \mathbf{j}] + \frac{\nu}{2} f_z. \quad (7.25)$$

avec

$$M_z = \frac{h_0^3}{24\mu} \frac{\Delta\eta^3}{8} \left[1 - \frac{4}{\Delta\eta^2} \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^2 \right]^3, \quad (7.26)$$

$$M_{xy} = -\frac{h_0^2}{8\mu} \frac{\Delta\eta}{2} \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right) \left[1 - \frac{4}{\Delta\eta^2} \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^2 \right]^2 \quad (7.27)$$

7.1. SYSTÈME ÉTUDIÉ

$$M_j = -\frac{2}{\Delta\eta} \frac{3}{4} \left[\frac{4}{3\Delta\eta^2} \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^3 - \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right) \right], \quad (7.28)$$

et $\Delta\eta = \eta_+ - \eta_-$ et $\Sigma\eta = \eta_+ + \eta_-$.

Il est aisé de vérifier qu'en prenant toutes les dérivées par rapport à la variable y nulles et avec $f_x = 0$, nous retrouvons la même équation que dans le cas d'une membrane unidimensionnelle (2.42).

Il est montré de plus dans l'appendice B.2 que le débit \mathbf{j} vérifie l'équation différentielle suivante

$$\begin{aligned} \nabla_{2D}(\nabla_{2D} \cdot \mathbf{j}) - \frac{24\mu\nu}{h_0^3 \Delta\eta^3} \mathbf{j} = & \frac{4\nu}{\Delta\eta^3} \left[\left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^3 - \frac{3}{4} \Delta\eta^2 \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right) \right] \nabla_{2D} f_z \\ & + \frac{3\nu}{h_0 \Delta\eta^3} \left[4 \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^2 - \Delta\eta^2 \right] \mathbf{f}_{2D}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Nous retrouvons facilement l'équation différentielle (2.41) en se plaçant dans le cas d'une membrane unidimensionnelle ($\partial_y = 0$) avec des murs plans ($\Sigma\eta = 0$ et $\Delta\eta = 2$).

Il nous reste maintenant à trouver l'expression du multiplicateur de Lagrange Σ . Pour y parvenir, il faut partir de la condition de conservation de l'aire de la membrane (7.7). Travaillant dans la limite de lubrification, la dérivée spatiale de h est petite, $\partial_{x,y} \sim \epsilon$ avec ϵ un petit paramètre. Donc

$$\partial_t \rho_{2D} = \partial_t [1 + (\partial_x h)^2 + (\partial_y h)^2]^{1/2} = \frac{\partial_x h \partial_x \partial_t h + \partial_y h \partial_y \partial_t h}{[1 + (\partial_x h)^2 + (\partial_y h)^2]^{1/2}} \sim \epsilon^2. \quad (7.30)$$

Or $\nabla_{2D} \cdot \mathbf{v}_{2D} \sim \epsilon$ donc à l'ordre dominant, l'équation de conservation de l'aire (7.7) devient

$$\nabla_{2D} \cdot \mathbf{v}_{2D} = \partial_x v_x + \partial_y v_y = 0. \quad (7.31)$$

Cette relation nous permet de calculer le multiplicateur de Lagrange. Son calcul dans le cas des murs plans est présenté dans la sous-section suivante.

7.1.3 Cas des murs plans

Le cas considéré à partir maintenant est celui des murs plans, ce qui signifie que $\Sigma\eta = 0$ et $\Delta\eta = 2$ et que le potentiel \mathcal{U} ne dépend plus que de la hauteur h de la membrane. Les différents préfacteurs de l'équation (7.25) deviennent

$$M_z = \frac{h_0^3}{24\mu} \left[1 - \left(\frac{h}{h_0} \right)^2 \right]^3, \quad (7.32)$$

$$M_{xy} = -\frac{h_0^2}{8\mu} \frac{h}{h_0} \left[1 - \left(\frac{h}{h_0} \right)^2 \right]^2 \quad (7.33)$$

et

$$M_j = -\frac{3}{4} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{h}{h_0} \right)^3 - \frac{h}{h_0} \right]. \quad (7.34)$$

CHAPITRE 7. EXTENSION DU PROBLÈME D'ADHÉSION À UNE MEMBRANE BIDIMENSIONNELLE

A partir des équations (7.8) et (7.9) et en utilisant la condition de non glissement au niveau de la membrane nous pouvons écrire que

$$v_{x,y} = \frac{h^2}{4\mu} \partial_{x,y} \Sigma p + \frac{h}{2} \Sigma a_{x,y} + \frac{1}{2} \Sigma b_{x,y} \quad (7.35)$$

où nous rappelons que pour une grandeur Y , $\Sigma Y = Y_+ + Y_-$. L'indice x, y signifie que nous pouvons choisir x ou y . A partir des résultats (B.44), (B.45) et (B.46) en appendice, nous montrons que la vitesse tangentielle de la membrane se met sous la forme

$$\mathbf{v}_{2D} = P_j(h) \mathbf{j} + P_{f_z}(h) \nabla_{2D} f_z + P_{f_{xy}}(h) \mathbf{f}_{2D}. \quad (7.36)$$

avec P_j , P_{f_z} et $P_{f_{xy}}$ trois fonctions polynomiales non constantes de h non explicitées ici. En réinjectant l'expression de la vitesse dans l'équation de conservation cela donne

$$0 = \nabla_{2D} \cdot (P_j(h) \mathbf{j} + P_{f_z}(h) \nabla_{2D} f_z + P_{f_{xy}}(h) \mathbf{f}_{2D}). \quad (7.37)$$

En reprenant l'équation différentielle (7.29), il est aisé de voir que dans la limite des murs très perméables ($\nu \rightarrow \infty$), le débit j s'exprime sous la forme $\mathbf{j} = P_{jf_{2D}}(h) \mathbf{f}_{2D} + P_{jf_z} \nabla_{2D} f_z$. Dans la limite des murs imperméables ($\nu = 0$) nous montrons facilement que le débit est une constante de l'espace. Dans ces deux cas limite l'équation (7.37) se met sous la forme

$$0 = \nabla_{2D} \cdot (P_{1x}(h) \mathbf{e}_x + P_{1y}(h) \mathbf{e}_y + P_2(h) \nabla_{2D} f_z + P_3(h) \mathbf{f}_{2D}), \quad (7.38)$$

avec P_{1x} , P_{1y} , P_2 et P_3 quatre fonctions polynomiales et P_3 non nul.

Nous rappelons que nous travaillons dans la limite des petites pentes, donc la courbure de la membrane est d'ordre $c \sim \epsilon^2$. Nous supposons que le potentiel $\mathcal{U} \sim 1$ et que la rigidité de courbure $\kappa \sim \epsilon^{-4}$ de sorte que les forces de courbure soient du même ordre de grandeur que celles qui sont dues au potentiel \mathcal{U} . Nous supposons ensuite que le multiplicateur de Lagrange se développe sous la forme $\Sigma = \epsilon^{-2}(\Sigma^{(0)} + \epsilon^2 \Sigma^{(2)} + \dots)$ pour avoir $\Sigma^{(0)} c$ du même ordre de grandeur que $\partial_t h$ et $-\kappa \Delta_b c - \mathcal{U}'(h)$. En reprenant les expressions des forces tangentielles (7.4) et normales (7.5) à l'ordre dominant, la conservation de l'aire donne

$$\nabla_{2D} \cdot (P_3(h) \nabla_{2D} \Sigma^{(0)}) = 0. \quad (7.39)$$

L'expression de P_3 dans le cas des murs très perméables est

$$P_3(h) = \frac{h_0}{2\mu} \left(1 - \frac{h^2}{h_0^2} \right) \quad (7.40)$$

et dans le cas des imperméables P_3 s'exprime sous la forme

$$P_3(h) = \frac{h_0}{2\mu} \left[-\frac{3}{4} \left(1 - \frac{h^2}{h_0^2} \right)^2 + \left(1 - \frac{h^2}{h_0^2} \right) \right]. \quad (7.41)$$

La hauteur h de la membrane est comprise entre $-h_0$ et h_0 , il est facile de montrer que $P_3(h)$ est toujours positif. De plus, comme nous travaillons avec des conditions aux limites périodiques, le principe de maximum fort des équations aux dérivées partielles du

7.1. SYSTÈME ÉTUDIÉ

deuxième ordre impose que $\Sigma^{(0)}$ soit une constante de l'espace. Alors que le point de départ était une contrainte d'inextensibilité locale, nous trouvons que dans l'approximation de lubrification, et à l'ordre dominant, la contrainte est globale car la valeur de $\Sigma^{(0)}$ est la même en tout point de la membrane.

L'équation (7.39) peut également être vue comme l'état stationnaire de l'équation de diffusion suivante

$$\partial_T \Sigma^{(0)} = \nabla_{2D} \cdot (P_3(h) \nabla_{2D} \Sigma^{(0)}) . \quad (7.42)$$

Il est alors naturel d'obtenir une solution homogène sur tout le système dans le cas périodique.

Il s'agit maintenant de trouver l'expression de cette grandeur $\Sigma^{(0)}$. Cette expression peut être trouvée en analysant l'équation (7.37) à l'ordre suivant. Nous allons donner ici une autre démonstration plus intuitive. L'aire totale de la membrane s'exprime

$$\mathcal{A} = \iint dx dy [1 + (\partial_x h)^2 + (\partial_y h)^2]^{1/2} = \mathcal{L}_x \mathcal{L}_y + \iint dx dy \frac{1}{2} [(\partial_x h)^2 + (\partial_y h)^2] + \mathcal{O}(\epsilon^4) \quad (7.43)$$

avec $\mathcal{L}_{x,y}$ la taille de la membrane dans la direction x ou y . La conservation de l'aire totale au cours du temps implique

$$0 = \partial_t \mathcal{A} = \iint dx dy (\partial_x h \partial_x \partial_t h + \partial_y h \partial_y \partial_t h) = - \iint dx dy (\Delta_{2D} h) \partial_t h \quad (7.44)$$

avec $\Delta_{2D} = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ le laplacien dans le plan (x, y) .

Pour le cas non-conservé, c'est-à-dire la limite des murs très perméables, nous avons à l'ordre dominant dans l'approximation de lubrification

$$\partial_t h = \frac{\nu}{2} f_z = \frac{\nu}{2} (-\kappa (\Delta_{2D})^2 h + \Sigma^{(0)} \Delta_{2D} h - \partial_z \mathcal{U}(\mathbf{r})) . \quad (7.45)$$

En insérant cette relation dans l'équation (7.44), l'expression de Σ est directement obtenue à l'ordre dominant pour le cas non-conservé

$$\Sigma_{nc}^{(0)} = \frac{\iint dx dy (\Delta_{2D} h) [\kappa (\Delta_{2D})^2 h + \partial_z \mathcal{U}(\mathbf{r})]}{\iint dx dy (\Delta_{2D} h)^2} . \quad (7.46)$$

Pour le cas conservé, c'est-à-dire, la limite des murs imperméables (toujours avec une rugosité nulle), l'équation d'évolution à l'ordre dominant vaut

$$\partial_t h = -\nabla_{2D} \cdot [M_z \nabla_{2D} (-\kappa (\Delta_{2D})^2 h + \Sigma^{(0)} \Delta_{2D} h - \partial_z \mathcal{U}(\mathbf{r})) + M_j \mathbf{j}] . \quad (7.47)$$

En utilisant une fois de plus l'équation (7.44) et par intégration par parties, les termes faisant intervenir le flux \mathbf{j} vont disparaître. Finalement, nous trouvons à l'ordre dominant

$$\Sigma_c^{(0)} = \frac{\mathcal{I}[\kappa (\Delta_{2D})^2 h + \partial_z \mathcal{U}(\mathbf{r})]}{\mathcal{I}[\Delta_{2D} h]} \quad (7.48)$$

avec

$$\mathcal{I}[g] = \iint dx dy (\Delta_{2D} h) \nabla_{2D} [M_z \nabla_{2D} g] \quad (7.49)$$

7.2 Premiers résultats pour le cas non-conservé

Maintenant que tous les ingrédients ont été mis en place, en particulier en ce qui concerne la conservation de l'aire, les simulations peuvent être réalisées. Nous n'allons présenter ici que le cas non-conservé, i.e. les murs très perméables, les simulations pour le cas conservé n'ayant pas encore été réalisées.

7.2.1 Schéma numérique

Les simulations portent sur le cas de murs plans ($\Delta\eta = 2$ et $\Sigma\eta = 0$), le potentiel ne dépend donc que de la hauteur h de la membrane. De même que pour la membrane unidimensionnelle le potentiel double puits choisi est de la forme

$$\mathcal{U}(h) = \mathcal{U}_0 U(H) = \mathcal{U}_0 \left(\frac{H^4}{4} - H_m^2 \frac{H^2}{2} \right), \quad (7.50)$$

avec $H = h/h_0$. Pour les simulations nous prenons toujours $H_m = 0,9$. De plus, ce sont les variables normalisées $(X, Y) = (\mathcal{U}_0/(\kappa h_0^2))^{1/4}(x, y)$ et $T = (\nu \mathcal{U}_0/(2h_0^2))t$ qui sont utilisées. Dans un premier temps nous posons

$$\Sigma^{norm} = \frac{h_0}{\mathcal{U}_0^{1/2} \kappa^{1/2}} \Sigma^{(0)} = \frac{\iint dX dY (\Delta_{2D}^{norm} H) [\Delta_{2D}^{norm} (\Delta_{2D}^{norm} H) + U'(H)]}{\iint dX dY (\Delta_{2D}^{norm} H)^2} \quad (7.51)$$

avec $\Delta_{2D}^{norm} = \partial_{XX} + \partial_{YY}$ et les intégrales sont prises sur toute la membrane. Comme nous sommes dans la limite $\nu \rightarrow \infty$, il ne reste que le dernier terme à droite dans l'équation (7.25) et l'équation d'évolution s'écrit

$$\partial_T H = -\Delta_{2D}^{norm} (\Delta_{2D}^{norm} H) - U'(H) + \Sigma^{norm} \Delta_{2D}^{norm} H. \quad (7.52)$$

Pour les simulations, une discrétisation par les schémas de différences finies habituels dans l'équation (7.46) s'avère ne pas conserver l'aire de façon suffisamment précise. Il convient donc de trouver un schéma numérique mieux adapté pour conserver l'aire. Nous avons choisi de partir de l'équation (7.44) imposée par la conservation de l'aire. Cette équation en variables normalisées devient

$$0 = \iint dX dY (\partial_X H \partial_X \partial_T H + \partial_Y H \partial_Y \partial_T H). \quad (7.53)$$

D'un point de vue numérique cela équivaut à

$$0 = \sum \sum \Delta X \Delta Y [(\Delta_X^1 H)(\Delta_X^1 \partial_T H) + (\Delta_Y^1 H)(\Delta_Y^1 \partial_T H)] \quad (7.54)$$

où $\Delta_X^n H$ est la discrétisation par différences finies de $\partial_X^n H$ (idem pour Y) et $\Delta X = \Delta Y$ sont les pas d'espace. Nous considérons ici que la discrétisation temporelle est suffisamment précise. Ce qui nous amène à l'expression du multiplicateur de Lagrange qui va effectivement conserver d'un point de vue numérique l'excès d'aire

$$\Sigma^{norm} = \frac{\sum \sum [(\Delta_X^1 H) \Delta_X^1 + (\Delta_Y^1 H) \Delta_Y^1] (\Delta_X^4 H + \Delta_Y^4 H + 2\Delta_X^2 \Delta_Y^2 H + U'(H))}{\sum \sum [(\Delta_X^1 H) \Delta_X^1 + (\Delta_Y^1 H) \Delta_Y^1] (\Delta_X^2 H + \Delta_Y^2 H)}. \quad (7.55)$$

7.2. PREMIERS RÉSULTATS POUR LE CAS NON-CONSERVÉ

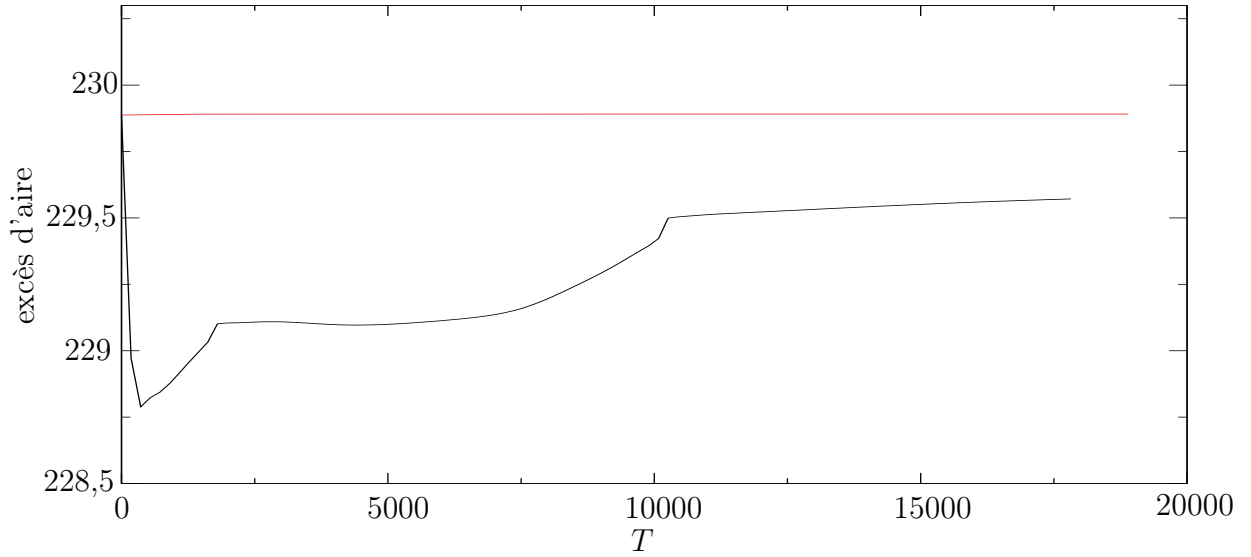


FIGURE 7.2 – Excès d’aire en fonction du temps pour un système de largeur $L = 60$. La courbe noire représente le cas où $\Sigma^{(0)}$ est la discrétisation de l’équation (7.46) et la courbe rouge le cas de la nouvelle discrétisation.

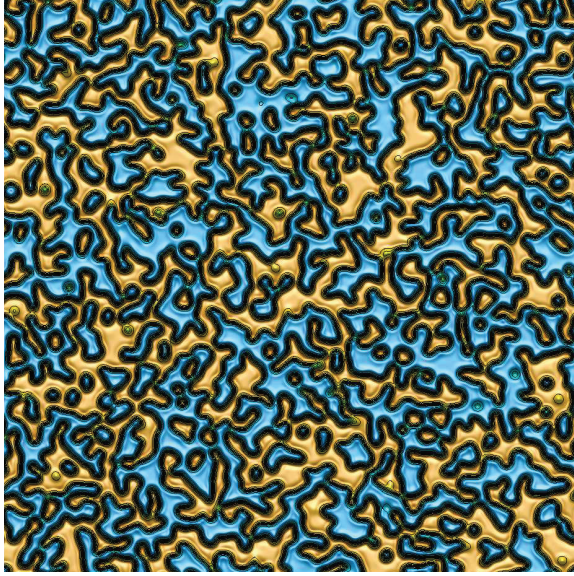
L’équation (7.55) est une discrétisation possible de (7.46) mais bien choisie afin d’assurer la conservation de l’aire d’un point de vue numérique. Nous comparons l’évolution de l’excès d’aire pour les deux schémas numérique sur la figure 7.2. Il est très clair que la conservation est mieux assurée par le nouveau schéma numérique.

7.2.2 Formation de rides et mûrissement ?

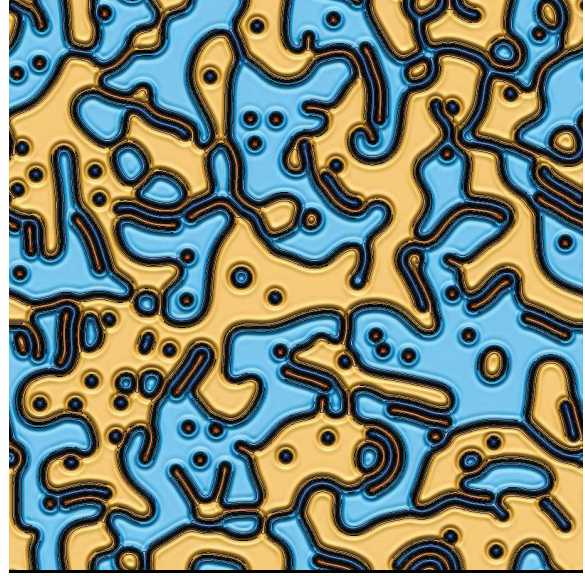
Nous allons présenter dans cette sous-section les premiers résultats des simulations du cas non-conservé en suivant le schéma numérique présenté ci-dessus. Nous utilisons la méthode des différences finies avec des conditions aux limites périodiques. Les conditions initiales choisies sont des valeurs aléatoires de faible amplitude et nous laissons relaxer le système sans imposer la conservation de l’aire de la membrane. Cette condition initiale nous permet d’obtenir un excès d’aire (aire de la membrane moins son aire projetée) significatif. Les possibilités de mouvement pour la membrane sont extrêmement limitées. De plus, cela permet de contrôler la valeur de l’excès d’aire que nous voulons mettre au système car nous appliquons la contrainte de conservation dès que nous voulons. Une fois le système suffisamment relaxé, la conservation de l’aire est appliquée, ceci correspond au temps $t = 0$ dans nos simulations. Nous présentons sur la figure 7.3 la dynamique de la membrane pour un système carré de largeur $L = 400$.

Plusieurs observations peuvent être faites. Premièrement, de même que pour la membrane unidimensionnelle, des domaines d’adhésion sur le mur supérieur ou inférieur se forment. Cependant, contrairement au cas 1D, la taille typique de ces domaines semble augmenter avec le temps, ce qui suggère du mûrissement. De plus, des structures à faible échelle, sous forme de cercles et de rides de même taille typique, se forment et semblent stables, elles ne disparaissent pas avec le temps (ce qui n’est pas le cas si nous enlevons la

CHAPITRE 7. EXTENSION DU PROBLÈME D'ADHÉSION À UNE MEMBRANE
BIDIMENSIONNELLE



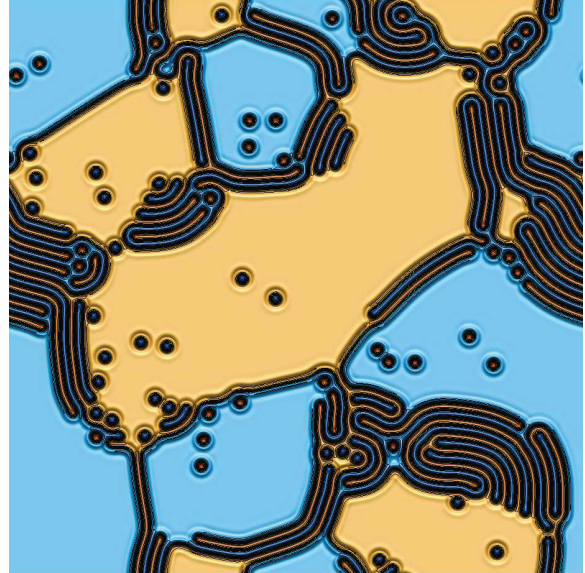
$T = 0$



$T = 3000$



$T = 27000$



$T = 207000$

FIGURE 7.3 – Membrane dans le cas bidimensionnel non-conservé pour différents temps. La largeur du système est $L = 400$. La couleur jaune correspond à une hauteur positive et la couleur bleue à une hauteur négative.

7.2. PREMIERS RÉSULTATS POUR LE CAS NON-CONSERVÉ

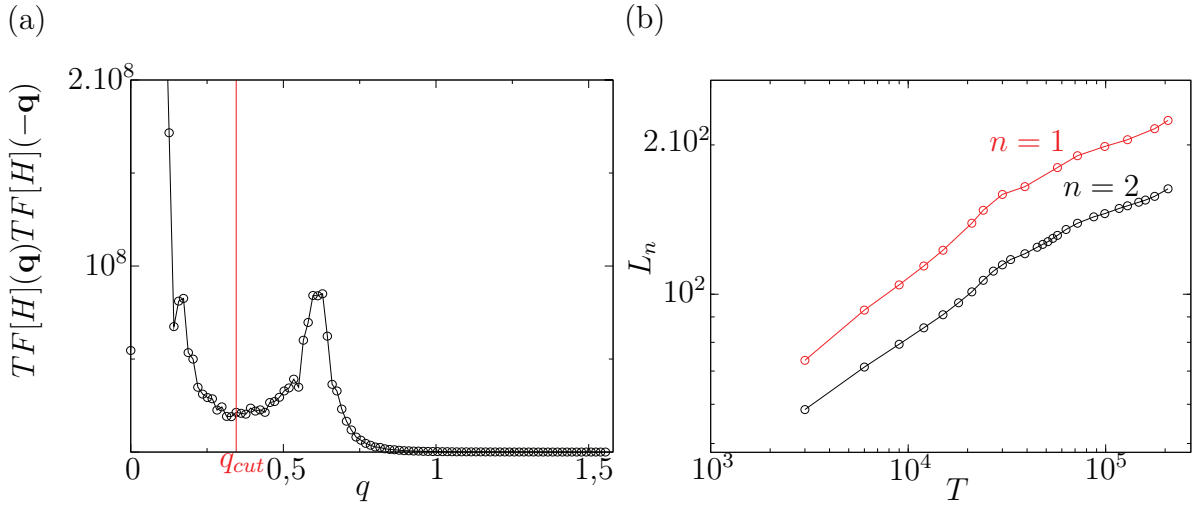


FIGURE 7.4 – (a) Norme de la transformée de Fourier de la hauteur de la membrane en fonction du vecteur d’onde q pour le cas non-conservé au temps $T = 207000$ pour une membrane de largeur $L = 400$. La ligne rouge représente la valeur de q_{cut} choisie. (b) L_n en fonction du temps pour $n = 1$ et $n = 2$ en échelle log-log. La largeur de la membrane est $L = 400$.

conservation de l’aire). La longueur totale des rides augmente avec le temps, les domaines d’adhésion de plus petites tailles se vident dans ces rides pour laisser s’agrandir les plus grands domaines. Les petits domaines ne disparaissent pas comme dans une dynamique de mûrissement classique mais deviennent des rides ou des cercles, le nombre total de domaines d’adhésion est une constante topologique de la dynamique. De plus, les rides évoluent systématiquement le long d’une interface entre un domaine d’adhésion sur le mur supérieur (jaune sur la figure 7.3) et un domaine d’adhésion sur le mur inférieur (bleu sur la figure 7.3) ou alors le long d’une autre ride.

La taille caractéristique des grands domaines d’adhésion semble croître avec le temps. Un moyen d’obtenir une taille caractéristique est de tracer la grandeur

$$L_n = 2\pi \left(\frac{\int_{2\pi/L}^{q_{cut}} dq \, TF[H](\mathbf{q})TF[H](-\mathbf{q})}{\int_{2\pi/L}^{q_{cut}} dq \, q^n TF[H](\mathbf{q})TF[H](-\mathbf{q})} \right)^{1/n} \quad (7.56)$$

en fonction du temps. TF désigne la transformée de Fourier, q la norme du vecteur d’onde \mathbf{q} et q_{cut} est un vecteur d’onde de coupure afin de s’affranchir des structures à petite échelle. Le choix de q_{cut} est indiqué sur la figure 7.4 en (a).

Les simulations par les méthodes explicites sont beaucoup trop longues. Pour pouvoir aller plus loin dans le temps et pour mieux exploiter les résultats, il est nécessaire de réfléchir à d’autres méthodes numériques. La suite de ce travail est effectuée en collaboration avec le postdoctorant Tung To qui développe un nouveau programme utilisant des méthodes implicites dans l’espace de Fourier afin d’augmenter la taille du système et le temps des simulations.

Chapitre 8

Conclusion et perspectives

Au cours de cette thèse, nous avons, à partir d'ingrédients physiques simples, développé des modèles visant à mieux comprendre la dynamique des membranes lipidiques en milieu confiné. Inspirés par la biologie et par les expériences existantes [12, 89], nous nous sommes intéressés au cas d'une membrane confinée entre deux parois. Plus particulièrement, nous nous sommes focalisés sur la situation où l'interaction avec les deux parois qui confinent la membrane forme un potentiel double puits, qui permet deux états d'adhésion : sur une paroi, ou sur l'autre. Cette situation a de fortes similitudes avec les dynamiques de séparation de phase [52] (ou plus généralement avec les systèmes étendus bistables), dont la dynamique habituelle est le mûrissement, c'est-à-dire la formation de domaines dont la taille croît indéfiniment avec le temps. Cependant, la rigidité de courbure des membranes change radicalement ce scénario. En effet, elle mène à des interactions oscillantes entre les parois de domaines. Dans notre modélisation, utilisant l'approximation de lubrification, et à une dimension, ces interactions suppriment complètement le mûrissement, et mènent à des états gelés avec des domaines d'adhésion de taille finie. Nous avons pu montrer que le chemin choisi par la dynamique dépend de la perméabilité des murs : seuls les murs imperméables peuvent donner lieu des états présentant un ordre à longue distance.

Nos résultats, basés sur un modèle très simple par rapport à la complexité biologique, amènent de nouveaux concepts pour la compréhension de la dynamique des membranes lipidiques. Par exemple, lors de l'adhésion cellulaire, des patchs d'adhésion de taille finie sont observés, et plusieurs mécanismes ont été proposés. Nous n'avons pas proposé véritablement une explication alternative étayée, mais nous avons mis en évidence un jeu d'ingrédients minimum pour observer des états gelés.

Par ailleurs, à un niveau plus fondamental, nous avons développé des outils relativement généraux pour étudier les dynamiques non-linéaires dans les systèmes unidimensionnels. Nous avons tout d'abord obtenu un critère de stabilité général pour les états stationnaires périodiques des systèmes variationnels (i.e. avec une fonctionnelle de Lyapunov). Ce critère permet un calcul simple de la stabilité, et est valide même en présence de non-localité dans la dynamique. Nous avons de plus proposé une nouvelle dérivation du modèle de dynamique de kinks. Le modèle obtenu est plus précis et fidèle à la dynamique complète que les modèles connus dans la littérature [48]. Ce modèle permet de simuler la dynamique de façon très efficace. Il devrait aussi servir de support pour de nouveaux développements analytiques, notamment pour aborder de façon plus rigoureuse l'absence

CHAPITRE 8. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

de mûrissement en présence de rigidité de courbure. Nous avons commencé à travailler dans cette direction.

Nous avons de plus questionné la stabilité des états gelés, en ajoutant au modèle des ingrédients susceptibles de supprimer ces états, tels que la tension de membrane, l'asymétrie du potentiel d'adhésion, et les fluctuations thermiques. Ces travaux ont permis un questionnement quantitatif de notre modélisation. Les ordres de grandeurs suggèrent par exemple que la tension nécessaire pour supprimer les états gelés et restaurer le mûrissement est plus grande que les tensions habituellement observées dans les expériences. Par ailleurs, les asymétries susceptibles de faire disparaître les états gelés sont similaires aux asymétries observées expérimentalement [12, 89]. Nous avons aussi montré que le bruit thermique restaure systématiquement le mûrissement après un temps activé par une barrière d'énergie liée aux interactions oscillantes entre kinks. Cependant, de par son caractère unidimensionnel, notre modèle ne peut prédire le comportement thermique d'un système bidimensionnel.

Inspiré par les expériences modèles sur la biolubrification développées à Lyon au LAMCOS et à l'ILM [18], nous avons aussi étudié la dynamique des membranes cisailées, en imposant un mouvement des murs à vitesse constante dans notre système avec un double puits. La dynamique non-linéaire de la membrane en présence de cisaillement est complexe, et présente plusieurs régimes, où l'on peut observer du mûrissement, des états stationnaires périodiques, ou du chaos. Nous avons sondé les conséquences de cette dynamique complexe sur la force de friction des membranes, et obtenu plusieurs comportements rhéologiques, tels que la thixotropie, ou la rhéofluidification. Notre modélisation est un premier pas vers la modélisation des expériences, mais elle ne permet pour l'instant pas de comprendre la réduction de frottement importante observée dans les expériences.

Le passage à une modélisation bidimensionnelle est un pas important pour mieux comprendre les expériences, à la fois pour l'adhésion et pour le cisaillement. Nous avons commencé à défricher cette direction, et obtenu les équations d'évolution d'une membrane bidimensionnelle dans la limite de lubrification. De plus, nous avons pris en compte l'inextensibilité de la membrane. Les premières simulation de l'adhésion dans un potentiel double puits suggèrent la présence de mûrissement dans certaines conditions. Il est cependant nécessaire d'utiliser de nouvelles méthodes numériques afin d'agrandir la taille des systèmes et d'aller plus loin dans le temps. D'autres directions de recherche s'imposent naturellement pour se rapprocher des expériences, comme l'étude des conséquences de la rugosité ou l'élasticité des murs, et le passage à un fluide environnant complexe ou actif. Cette thèse a jeté les bases pour aborder ces nouvelles problématiques.

Annexe A

Dérivée fonctionnelle de l'énergie de la membrane

Nous allons dans ce premier appendice présenter les outils de géométrie différentielle nécessaires à la description mathématique des membranes. Nous allons ensuite détailler le calcul de la dérivée fonctionnelle de l'énergie de la membrane. La difficulté principale vient du fait que nous utilisons des coordonnées internes qui dépendent de la morphologie de la membrane. Il faut donc prendre en compte le fait qu'entre la membrane en \mathbf{r} et la membrane en $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ les coordonnées internes varient. Il est donc nécessaire de considérer la variation de la métrique causée par la déformation de la membrane.

A.1 Éléments de géométrie différentielle

Commençons par un peu de géométrie. Nous considérons une membrane bidimensionnelle d'épaisseur nulle, l'épaisseur d'une membrane (quelques nm) étant négligeable par rapport à sa taille caractéristique (quelques μm). Nous nous plaçons dans le cas où nous pouvons utiliser la notation de Monge, c'est-à-dire que pour un point M de coordonnées (x, y) donné du plan (P) , correspondant à $z = 0$, il n'existe qu'un seul point M' dont le projeté sur le plan (P) est M (figure A.1). Le triplet (x, y, z) correspond aux coordonnées cartésiennes. La composante selon z de M' est la hauteur h de la membrane. Ce sont les notations que nous utiliserons tout au long de ce manuscrit mais afin de définir les différents outils de géométrie différentielle nous allons utiliser les coordonnées internes (s_1, s_2) . Ce sont des coordonnées arbitraires qui ne correspondent pas nécessairement à une longueur d'arc. Chaque point de notre surface sera alors repéré par un vecteur position $\mathbf{r}(s_1, s_2)$ dépendant des coordonnées internes.

Nous pouvons définir en chaque point de la surface deux vecteurs tangents

$$\mathbf{t}_i = \partial_{s_i} \mathbf{r}(s_1, s_2) \quad (\text{A.1})$$

où $i = 1, 2$. Nous avons alors deux vecteurs tangents qui définissent le plan tangent à la surface. Nous pouvons ainsi construire un vecteur unitaire normal à la surface

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2}{\|\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2\|}. \quad (\text{A.2})$$

ANNEXE A. DÉRIVÉE FONCTIONNELLE DE L'ÉNERGIE DE LA MEMBRANE

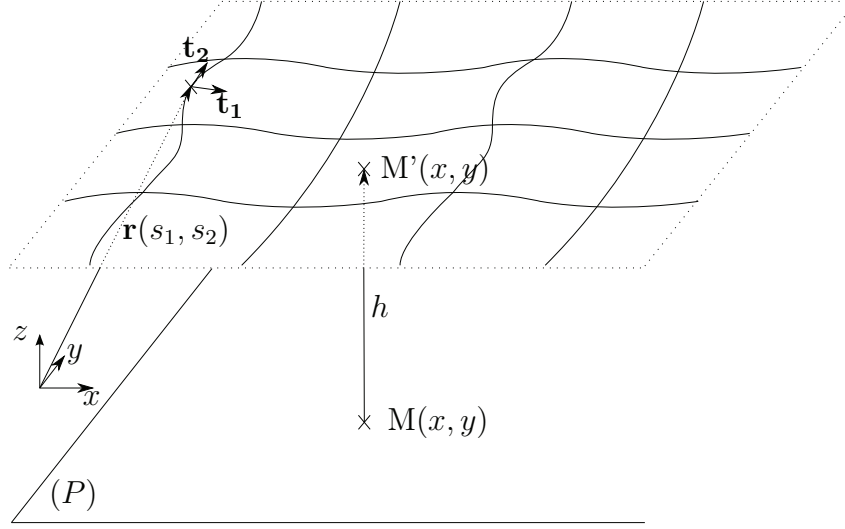


FIGURE A.1 – Schéma d'une membrane avec les différentes notations. M est le projeté sur le plan (P) , $z = 0$, du point M' de la membrane.

Nous cherchons maintenant à calculer l'élément de surface $d\mathcal{A}$ couvert par le déplacement de $\mathbf{r}(s_1, s_2)$ vers $\mathbf{r}(s_1 + ds_1, s_2 + ds_2) = \mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Cela revient à calculer l'aire du parallélogramme formé par $\partial_{s_1}\mathbf{r}ds_1$ et $\partial_{s_2}\mathbf{r}ds_2$. Nous pouvons donc écrire

$$d\mathcal{A} = \|\partial_{s_1}\mathbf{r}ds_1 \wedge \partial_{s_2}\mathbf{r}ds_2\| = \|\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2\| ds_1 ds_2 = [(\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_1)(\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_2) - (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2)^2]^{1/2} ds_1 ds_2. \quad (\text{A.3})$$

Il apparaît alors les composants du tenseur de la métrique définis de la manière suivante

$$g_{ij} = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_j, \quad (\text{A.4})$$

et nous en déduisons directement

$$d\mathcal{A} = g^{1/2} ds_1 ds_2, \quad (\text{A.5})$$

avec $g = \det(g_{ij})$. Nous pouvons également en déduire que

$$\mathbf{n} = g^{-1/2} \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2. \quad (\text{A.6})$$

Il nous reste à définir le tenseur de courbure (c_{ij}) qui va faire intervenir les dérivées secondes du vecteur position

$$c_{ij} = (\partial_{s_i} \partial_{s_j} \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = (\partial_{s_i} \mathbf{t}_j) \cdot \mathbf{n} = (\partial_{s_j} \mathbf{t}_i) \cdot \mathbf{n}, \quad (\text{A.7})$$

cela correspond à la projection sur la direction normale à la surface des dérivées premières des vecteurs tangents. Nous pouvons également remarquer que (c_{ij}) est symétrique donc diagonalisable. Les courbures moyenne c_m et gaussienne c_G de la surface dérivent de ce tenseur, ce sont respectivement la trace et le déterminant du tenseur

$$\left(c_j^i = \sum_{k=1,2} g^{ik} c_{kj} \right) \quad (\text{A.8})$$

A.2. CAS DE LA MEMBRANE UNIDIMENSIONNELLE

où les g^{ij} sont les composantes de la matrice inverse de (g_{ij}) . Nous avons

$$c_m = c_1^1 + c_2^2 \quad (\text{A.9})$$

et

$$c_G = c_1^1 c_2^2. \quad (\text{A.10})$$

Pour calculer c_m et c_G il faut donc connaître les valeurs propres de (c_j^i) . Enfin nous définissons (c^{ij}) la matrice inverse de (c_{ij}) .

Pour une courbe dans un plan, la courbure est proportionnelle à la dérivée seconde par rapport à l'abscisse curviligne le long de la courbe s . L'intersection de notre membrane avec un plan (P') comprenant l'axe z est une courbe de la forme $z = f(x, y) = f(x')$ où x' est la coordonnée sur l'axe formé par l'intersection des plans (P) et (P') . La courbure de la courbe en x' est $c = \partial_s^2 h = f'' / (1 + f'^2)^{1/2}$. Nous pouvons calculer la valeur de c pour chaque direction et nous trouvons que les valeurs propres de (c_j^i) en un point M' de la membrane correspondent aux courbures maximums c_{max} et minimums c_{min} par rapport à la direction. Nous en déduisons

$$c_m = c_{max} + c_{min} \quad (\text{A.11})$$

et

$$c_G = c_{max} c_{min}. \quad (\text{A.12})$$

Nous pouvons trouver plus de détails sur la géométrie différentielle dans la référence [44].

A.2 Cas de la membrane unidimensionnelle

Commençons par calculer la dérivée fonctionnelle de l'énergie dans le cas d'une membrane unidimensionnelle, (calcul également écrit dans la thèse d'I. Cantat [16]). Nous reprenons les notations des sous-sections 1.4.3 et 2.1.4. L'énergie de la membrane vaut

$$\mathcal{E}_{mem} = \mathcal{E}_\kappa + \mathcal{E}_p = \int ds \left(\frac{\kappa}{2} c^2 + \mathcal{U}(\mathbf{r}) \right) \quad (\text{A.13})$$

où \mathcal{E}_κ est l'énergie de courbure de la membrane et \mathcal{E}_p est l'énergie d'interaction avec le milieu extérieur.

Pour prendre en compte la variation de l'abscisse curviligne nous considérons une seconde coordonnée interne a qui elle, ne varie pas. La métrique g présentée dans la section précédente est un nombre pour une membrane 1D et son déterminant est

$$g = \partial_a \mathbf{r} \cdot \partial_a \mathbf{r} = \left(\frac{ds}{da} \right)^2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = \left(\frac{ds}{da} \right)^2, \quad (\text{A.14})$$

nous allons maintenant intégrer sur l'élément da $g^{1/2} = ds$. L'énergie de la membrane s'écrit alors de la manière suivante

$$\mathcal{E}_{mem} = \frac{\kappa}{2} \int da g^{1/2} c^2 + \int da g^{1/2} \mathcal{U}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa}{2} \int da g^{1/2} (\partial_{ss} \mathbf{r})^2 + \int da g^{1/2} \mathcal{U}(\mathbf{r}). \quad (\text{A.15})$$

ANNEXE A. DÉRIVÉE FONCTIONNELLE DE L'ÉNERGIE DE LA MEMBRANE

Nous pouvons remplacer ∂_s par $g^{-1/2}\partial_a$, ce qui donne

$$\mathcal{E}_{mem} = \frac{\kappa}{2} \int da \, g^{-1/2} [\partial_a(g^{-1/2}\partial_a\mathbf{r})]^2 + \int da \, g^{1/2}\mathcal{U}(\mathbf{r}). \quad (\text{A.16})$$

L'étape suivante est de calculer la variation de cette énergie durant la déformation de la membrane. Dans un premier temps nous avons besoin de la variation de la métrique

$$\delta g = (\partial_a(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}))^2 - (\partial_a\mathbf{r})^2 = 2\partial_a\mathbf{r} \cdot \partial_a\delta\mathbf{r}, \quad (\text{A.17})$$

nous pouvons désormais calculer la variation de l'énergie

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}_{mem} = & \frac{\kappa}{2} \int da \, \left\{ -\frac{1}{2}g^{-3/2}[\partial_a(g^{-1/2}\partial_a\mathbf{r})]^2\delta g + 2g^{-1/2}[\partial_a(g^{-1/2}\partial_a\mathbf{r})] \cdot [\partial_a(-\frac{1}{2}g^{-3/2}\partial_a\mathbf{r}\delta g)] \right. \\ & \left. + 2g^{-1/2}[\partial_a(g^{-1/2}\partial_a\mathbf{r})] \cdot [\partial_a(g^{-1/2}\partial_a\delta\mathbf{r})] \right\} + \int da \, \left(\frac{1}{2}g^{-1/2}\mathcal{U}(\mathbf{r})\delta g + g^{1/2}\partial_a\mathcal{U}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{r} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

ce qui donne en remplaçant δg par son expression, en utilisant le fait que $\partial_s\mathbf{r} \cdot \partial_{ss}\mathbf{r} \propto \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$ et en reprenant la relation (A.14)

$$\delta\mathcal{E}_{mem} = \frac{\kappa}{2} \int ds \, [-3(\partial_s\mathbf{r} \cdot \partial_s\delta\mathbf{r})(\partial_{ss}\mathbf{r})^2 + 2\partial_{ss}\mathbf{r} \cdot \partial_{ss}\delta\mathbf{r}] + \int ds \, (\partial_a\mathcal{U}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{r} + \mathcal{U}(\mathbf{r})\partial_s\mathbf{r} \cdot \partial_s\delta\mathbf{r}). \quad (\text{A.19})$$

Finalement par intégration par parties et dans la limite d'un grand système ou en considérant un système périodique la variation d'énergie s'exprime sous la forme

$$\delta\mathcal{E}_{mem} = \int ds \, \left[\kappa \left(\frac{c^3}{2} + \partial_{ss}c \right) \mathbf{n} + \partial_a\mathcal{U}(\mathbf{r}) - \partial_s\mathcal{U}(\mathbf{r})\mathbf{t} - c \mathcal{U}(\mathbf{r})\mathbf{n} \right] \cdot \delta\mathbf{r} \quad (\text{A.20})$$

où nous avons utilisé les deux formules de Frenet $\partial_s\mathbf{t} = c\mathbf{n}$ et $\partial_s\mathbf{n} = -c\mathbf{t}$. Nous retrouvons l'expression de la force par unité de longueur que subie la membrane lipidique

$$\mathbf{f}_{mem} = \mathbf{f}_\kappa - \partial_a\mathcal{U}(\mathbf{r}) + \partial_s\mathcal{U}(\mathbf{r})\mathbf{t} + c \mathcal{U}(\mathbf{r})\mathbf{n} \quad (\text{A.21})$$

avec \mathbf{f}_κ la force de courbure dont l'expression est

$$\mathbf{f}_\kappa = -\kappa \left(\frac{c^3}{2} + \partial_{ss}c \right) \mathbf{n}. \quad (\text{A.22})$$

A.3 Cas de la membrane bidimensionnelle

Dans cette section, nous allons détailler la dérivation fonctionnelle de l'énergie de courbure pour une membrane bidimensionnelle avec des conditions aux limites périodiques. En plus de l'énergie de courbure \mathcal{E}_κ et l'énergie d'interaction avec le milieu extérieur \mathcal{E}_p nous allons prendre en compte la contribution à l'énergie du multiplicateur de Lagrange Σ qui assure la conservation locale de l'aire. Cette énergie vaut

$$\mathcal{E}_\Sigma = \iint d\mathcal{A} \, \Sigma(s_1, s_2), \quad (\text{A.23})$$

A.3. CAS DE LA MEMBRANE BIDIMENSIONNELLE

avec s_1 et s_2 les deux coordonnées internes à la membrane. L'énergie totale de la membrane s'écrit de la manière suivante

$$\mathcal{E}_{mem} = \mathcal{E}_\kappa + \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_\Sigma = \iint d\mathcal{A} \left(\frac{\kappa}{2} c_m^2 + \mathcal{U}(\mathbf{r}) + \Sigma(s_1, s_2) \right), \quad (\text{A.24})$$

qui peut se réécrire sous la forme

$$\mathcal{E}_{mem} = \iint ds_1 ds_2 g^{1/2} \left(\frac{\kappa}{2} c_m^2 + \mathcal{U}(\mathbf{r}) + \Sigma(s_1, s_2) \right), \quad (\text{A.25})$$

avec c_m la courbure moyenne. Cette courbure vaut

$$c_m = g^{ij} c_{ji} = (g^{ij} \partial_{s_j} \partial_{s_i} \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = g^{-1/2} \partial_{s_j} (g^{1/2} g^{ij} \partial_{s_i} \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = \Delta_b \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.26})$$

en utilisant la convention de sommation d'Einstein et avec Δ_b le laplacien de Beltrami. Nous rappelons que (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}) et (c_{ij}) est le tenseur de courbure (voir section A.1).

De même que pour la membrane unidimensionnelle, il faut faire attention au fait que les coordonnées internes et donc la métrique g (définition dans la section A.1) varient lorsque la membrane se déplace de $\{\mathbf{r}\}$ vers $\{\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}\}$. La métrique vaut

$$g(\mathbf{r}) = (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_1)(\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_2) - (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2)^2 = (\partial_{s_1} \mathbf{r})^2 (\partial_{s_2} \mathbf{r})^2 - (\partial_{s_1} \mathbf{r} \cdot \partial_{s_2} \mathbf{r})^2. \quad (\text{A.27})$$

Nous pouvons de cette expression calculer la variation δg de la métrique qui vaut

$$\begin{aligned} \delta g &= g(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - g(\mathbf{r}) = 2(\partial_{s_1} \mathbf{r})^2 \partial_{s_2} \mathbf{r} \cdot \partial_{s_2} \delta\mathbf{r} + 2(\partial_{s_2} \mathbf{r})^2 \partial_{s_1} \mathbf{r} \cdot \partial_{s_1} \delta\mathbf{r} \\ &\quad - 2(\partial_{s_1} \mathbf{r} \cdot \partial_{s_2} \mathbf{r})(\partial_{s_1} \mathbf{r} \cdot \partial_{s_2} \delta\mathbf{r} + \partial_{s_2} \mathbf{r} \cdot \partial_{s_1} \delta\mathbf{r}) \\ &= 2g(\mathbf{r}) g^{ij}(\mathbf{r}) \partial_{s_i} \mathbf{r} \cdot \partial_{s_j} \delta\mathbf{r} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

où nous utilisons toujours la convention de sommation d'Einstein. Nous vérifions facilement que $g^{11} = g_{22}/g$ et que $g^{12} = -g_{12}/g$ (idem en inversant les indices 1 et 2).

Energie de courbure

Commençons par calculer la variation de l'énergie de courbure. Ce calcul est lourd et nous ne le présenterons pas en détail. Pour l'intégralité de ce calcul nous pouvons nous référer à l'article [104]. La variation de l'énergie de courbure vaut

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_\kappa &= \delta \left(\iint ds_1 ds_2 g^{1/2} \frac{\kappa}{2} c_m^2 \right) \\ &= \kappa \iint d\mathcal{A} \left(\Delta_b c_m + \frac{c_m^3}{2} - 2c_m c_G \right) \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{r} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Energie induite par Σ

ANNEXE A. DÉRIVÉE FONCTIONNELLE DE L'ÉNERGIE DE LA MEMBRANE

Nous allons maintenant calculer la variation de l'énergie induite par la conservation locale de l'aire

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{E}_\Sigma &= \left(\iint ds_1 ds_2 g^{1/2} \Sigma \right) \\
&= \iint ds_1 ds_2 \Sigma \frac{1}{2} g^{-1/2} \delta g \\
&= \iint ds_1 ds_2 \Sigma g^{1/2} g^{ij} \partial_{s_i} \mathbf{r} \cdot \partial_{s_j} \delta \mathbf{r} \\
&= - \iint ds_1 ds_2 \partial_{s_j} \left(\Sigma g^{1/2} g^{ij} \partial_{s_i} \mathbf{r} \right) \cdot \delta \mathbf{r} \\
&= - \iint ds_1 ds_2 \left[\partial_{s_j} \Sigma g^{1/2} g^{ij} \partial_{s_i} \mathbf{r} + \Sigma \partial_{s_j} \left(g^{1/2} g^{ij} \partial_{s_i} \mathbf{r} \right) \right] \cdot \delta \mathbf{r} \\
&= - \iint d\mathcal{A} \left(g^{ij} \partial_{s_j} \Sigma \partial_{s_i} \mathbf{r} + \Sigma \Delta_b \mathbf{r} \right) \cdot \delta \mathbf{r} \\
&= - \iint d\mathcal{A} \left(g^{ij} \partial_{s_j} \Sigma \partial_{s_i} \mathbf{r} + \Sigma c_m \mathbf{n} \right) \cdot \delta \mathbf{r},
\end{aligned} \tag{A.30}$$

Energie d'interaction

Nous allons maintenant calculer la variation de l'énergie d'interaction avec le milieu extérieur

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{E}_p &= \left(\iint ds_1 ds_2 g^{1/2} \mathcal{U}(\mathbf{r}) \right) \\
&= \iint ds_1 ds_2 \left(\frac{1}{2} \mathcal{U}(\mathbf{r}) g^{-1/2} \delta g + g^{1/2} \partial_{\mathbf{r}} \mathcal{U}(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{r} \right) \\
&= \iint ds_1 ds_2 \left(\mathcal{U}(\mathbf{r}) g^{1/2} g^{ij} \partial_{s_i} \mathbf{r} \cdot \partial_{s_j} \delta \mathbf{r} + g^{1/2} \partial_{\mathbf{r}} \mathcal{U}(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{r} \right),
\end{aligned} \tag{A.31}$$

puis en suivant les mêmes étapes que le calcul précédent nous trouvons

$$\delta\mathcal{E}_p = \iint d\mathcal{A} \left(-g^{ij} \partial_{s_j} \mathcal{U}(\mathbf{r}) \partial_{s_i} \mathbf{r} - \mathcal{U}(\mathbf{r}) c_m \mathbf{n} + \partial_{\mathbf{r}} \mathcal{U}(\mathbf{r}) \right) \cdot \delta \mathbf{r}. \tag{A.32}$$

Nous en déduisons la force totale par unité de surface que subie la membrane

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{mem} &= \mathbf{f}_\kappa + \mathbf{f}_\Sigma + \mathbf{f}_p \\
&= - \left(\Delta_b c_m + \frac{c_m^3}{2} - 2c_m c_G \right) \mathbf{n} + g^{ij} \partial_{s_j} \Sigma \partial_{s_i} \mathbf{r} + \Sigma c_m \mathbf{n} \\
&\quad - \left(-g^{ij} \partial_{s_j} \mathcal{U}(\mathbf{r}) \partial_{s_i} \mathbf{r} - \mathcal{U}(\mathbf{r}) c_m \mathbf{n} + \partial_{\mathbf{r}} \mathcal{U}(\mathbf{r}) \right).
\end{aligned} \tag{A.33}$$

Annexe B

Détail de la dérivation des équations d'évolution

Le but de cet appendice est de montrer le détail du calcul pour l'obtention des équations d'évolution pour une membrane unidimensionnelle et bidimensionnelle. De l'équation d'évolution de la membrane 2D avec des murs rugueux nous pouvons en déduire l'équation de la membrane 1D avec des murs plans. Cependant, nous présenterons séparément les deux calculs, afin de ne pas être obligé de faire le calcul plus lourd du cas 2D pour obtenir l'équation du cas 1D avec des murs plans.

B.1 Cas de la membrane unidimensionnelle avec des murs plans

Equation d'évolution sur h

Commençons par le cas le plus simple, la membrane 1D. Nous allons reprendre plusieurs résultats de la sous-section 2.2.2. Nous partons des deux équations (2.32) et (2.33) dont la somme donne

$$\partial_t h = \frac{1}{2} \partial_x \Delta j + \frac{\nu}{2} \Delta p, \quad (\text{B.1})$$

nous rappelons que $\Delta y = y_+ - y_-$ et que $\Sigma y = y_+ + y_-$. Ensuite, en reprenant l'expression de la vitesse du fluide (2.25)

$$v_x = \frac{z^2}{2\mu} \partial_x p + az + b,$$

nous pouvons directement calculer le débit de fluide en dessous de la membrane

$$j_- = \int_{-h_0}^h dz v_x = \frac{\partial_x p_-}{6\mu} (h^3 + h_0^3) + \frac{a_-}{2} (h^2 - h_0^2) + b_- (h + h_0) \quad (\text{B.2})$$

et le débit de fluide au-dessus de la membrane

$$j_+ = \int_h^{h_0} dz v_x = \frac{\partial_x p_+}{6\mu} (h_0^3 - h^3) + \frac{a_+}{2} (h_0^2 - h^2) + b_+ (h_0 - h). \quad (\text{B.3})$$

ANNEXE B. DÉTAIL DE LA DÉRIVATION DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION

En réinjectant dans l'équation (B.1) nous retombons sur le résultat intermédiaire (2.34) :

$$\partial_t h = \frac{h_0^3}{2\mu} \partial_x \left[\frac{1}{6} \partial_x (\Delta p) - \frac{h^3}{6h_0^3} \partial_x (\Sigma p) + \frac{\mu}{2h_0} \left(1 - \frac{h^2}{h_0^2} \right) \Sigma a + \frac{\mu}{h_0^2} \left(\Delta b - \frac{h}{h_0} \Sigma b \right) \right] + \frac{\nu}{2} \Delta p.$$

Il reste désormais à calculer les sommes Σ et les différences Δ des p , a et b . Nous reprenons donc le système d'équations décrit dans la sous-section 2.2.2 en prenant en compte une vitesse v_c des murs qui peut être nulle dans le problème de l'adhésion

$$\begin{cases} v_{x+}|_{z=h_0} = v_c, \\ v_{x-}|_{z=-h_0} = -v_c, \\ v_{x+}|_{z=h} = v_{x-}|_{z=h}, \\ \Delta p = f_n, \\ \partial_z v_{x+}|_{z=h} - \partial_z v_{x-}|_{z=h} = 0, \\ j = j_+ + j_- = \frac{1}{6\mu} (h_0^3 \partial_x \Sigma p - h^3 \partial_x \Delta p) + \frac{1}{2} (h_0^2 - h^2) \Delta a + h_0 \Sigma b - h \Delta b. \end{cases}$$

Nous allons réarranger ce système. Nous allons d'abord sommer puis soustraire les deux premières lignes. Les autres lignes vont juste être réécrites en remplaçant v_x par son expression (2.25). La quatrième ligne donne directement Δp .

$$\begin{cases} \frac{h_0^2}{2\mu} \partial_x \Sigma p + h_0 \Delta a + \Sigma b = 0, \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{cases} \frac{h_0^2}{2\mu} \partial_x \Delta p + h_0 \Sigma a + \Delta b = 2v_c, \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{cases} \frac{h^2}{2\mu} \partial_x \Delta p + h \Delta a + \Delta b = 0, \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{cases} \Delta p = f_n, \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{cases} \frac{h}{\mu} \partial_x \Delta p + \Delta a = 0, \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{cases} j = \frac{1}{6\mu} (h_0^3 \partial_x \Sigma p - h^3 \partial_x \Delta p) + \frac{1}{2} (h_0^2 - h^2) \Delta a + h_0 \Sigma b - h \Delta b. \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Nous connaissons déjà Δp , donc de l'équation (B.8) nous en déduisons directement

$$\Delta a = -\frac{h}{\mu} \partial_x f_n. \quad (\text{B.10})$$

En réinjectant dans (B.6) nous avons

$$\Delta b = \frac{h^2}{2\mu} \partial_x f_n, \quad (\text{B.11})$$

puis dans (B.5) cela donne

$$\Sigma a = \frac{2v_c}{h_0} - \frac{h_0}{2\mu} \left(1 + \frac{h^2}{h_0^2} \right) \partial_x f_n. \quad (\text{B.12})$$

B.2. CAS DE LA MEMBRANE BIDIMENSIONNELLE AVEC DES MURS RUGUEUX

Il ne reste plus qu'à déterminer Σp et Σb . En réalisant l'opération $3 \times (\text{B.9}) - h_0 (\text{B.4})$ nous obtenons

$$\Sigma b = \frac{3}{2h_0}j + \frac{1}{4h_0\mu}(h^3 + h_0^2h)\partial_x f_n. \quad (\text{B.13})$$

Nous pouvons finalement en déduire

$$\partial_x \Sigma p = -\frac{3\mu}{h_0^3}j + \frac{1}{2}\left(3\frac{h}{h_0} - \frac{h^3}{h_0^3}\right)\partial_x f_n. \quad (\text{B.14})$$

Il suffit maintenant de tous réinjecter dans l'équation (2.34) pour obtenir l'équation d'évolution finale

$$\partial_t h = \partial_x \left[-\frac{h_0^3}{24\mu} \left(1 - \frac{h^2}{h_0^2}\right)^3 \partial_x(f_n) + \frac{3}{4}j \frac{h}{h_0} \left(\frac{h^2}{3h_0^2} - 1\right) \right] + \frac{\nu}{2}f_n.$$

Equation différentielle vérifiée par j

Nous allons ici expliquer comment nous obtenons l'équation différentielle (2.41). Nous commençons par calculer (2.33)-(2.32)

$$\partial_x j + \nu \Sigma p = 2\nu p_{ext}, \quad (\text{B.15})$$

nous dérivons cette équation et nous remplaçons $\partial_x \Sigma p$ par son expression calculée ci-dessus pour obtenir l'équation différentielle vérifiée par j :

$$\partial_{xx}j - \frac{3\mu\nu}{h_0^3}j = \frac{\nu}{2}\left(\frac{h^3}{h_0^3} - 3\frac{h}{h_0}\right)\partial_x f_n.$$

B.2 Cas de la membrane bidimensionnelle avec des murs rugueux

Equation d'évolution sur h

Nous allons ici détailler comment retrouver l'équation d'évolution (7.25) de la membrane dans le cas du système tridimensionnel cisailé et dans la limite de lubrification avec des murs rugueux. Nous considérons dans cet appendice le cas général où le mur du dessus se déplace à la vitesse $\mathbf{v}_c = v_{cx}\mathbf{e}_x + v_{cy}\mathbf{e}_y$ et le mur du dessous à la vitesse $-\mathbf{v}_c$.

De même que la membrane unidimensionnelle les vitesses, dans la limite de lubrification s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} v_x = \frac{z^2}{2\mu}\partial_x p + a_x z + b_x, \\ v_y = \frac{z^2}{2\mu}\partial_y p + a_y z + b_y. \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

$$\quad (\text{B.17})$$

ANNEXE B. DÉTAIL DE LA DÉRIVATION DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION

A partir de la conservation de la quantité de fluide, nous faisons apparaître la dérivée temporelle de la hauteur de la membrane h . Nous rappelons que le fluide est incompressible, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, donc

$$0 = \int_{h_0\eta_-}^h dz (\partial_x v_{x-} + \partial_y v_{y-} + \partial_z v_{z-}) = \int_{h_0\eta_-}^h dz (\partial_x v_{x-} + \partial_y v_{y-}) - v_{z-}|_{z=h_0\eta_-} + v_{z-}|_{z=h}. \quad (\text{B.18})$$

Nous utilisons la loi de perméabilité au niveau des murs $v_{z\pm} = \pm\nu(p_{\pm} - p_{ext})$ lorsque ceux-ci sont immobiles. Du fait de leur déplacement et de la rugosité, la vitesse des murs dans la direction z n'est pas nulle, il faut la rajouter. La membrane est considérée imperméable, donc la vitesse du fluide en $z = h$ est celle de la membrane. Nous obtenons donc

$$0 = \int_{h_0\eta_-}^h dz (\partial_x v_{x-} + \partial_y v_{y-}) + \nu(p_- - p_{ext}) - \partial_t(h_0\eta_-) - v_{x-}|_{z=h_0\eta_-} \partial_x(h_0\eta_-) - v_{y-}|_{z=h_0\eta_-} \partial_y(h_0\eta_-) + \partial_t h + v_{x-}|_{z=h} \partial_x h + v_{y-}|_{z=h} \partial_y h. \quad (\text{B.19})$$

Finalement, nous avons

$$\begin{aligned} \partial_t h &= -\partial_x \left(\int_{h_0\eta_-}^h dz v_{x-} \right) - \partial_y \left(\int_{h_0\eta_-}^h dz v_{y-} \right) - \nu(p_- - p_{ext}) + \partial_t(h_0\eta_-) \\ &= -\partial_x j_{x-} - \partial_y j_{y-} - \nu(p_- - p_{ext}) + \partial_t(h_0\eta_-). \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

En intégrant entre h et $h_0\eta_+$ nous obtenons une relation similaire

$$\partial_t h = \partial_x j_{x+} + \partial_y j_{y+} + \nu(p_+ - p_{ext}) + \partial_t(h_0\eta_+). \quad (\text{B.21})$$

En sommant ces deux équations nous obtenons l'équation suivante

$$\partial_t h = \frac{1}{2} [\partial_x(\Delta j_x) + \partial_y(\Delta j_y)] + \frac{\nu}{2} \Delta p + \partial_t \left(h_0 \frac{\Sigma \eta}{2} \right), \quad (\text{B.22})$$

où nous rappelons que pour toute grandeur Y , $\Delta Y = Y_+ - Y_-$ et $\Sigma Y = Y_+ + Y_-$. Nous calculons ensuite aisément que

$$\begin{aligned} \Delta j_{x,y} &= \frac{1}{6\mu} \left\{ \left[-h^3 + \frac{h_0^3}{8} (\Sigma \eta^3 + 3\Sigma \eta \Delta \eta^2) \right] \partial_{x,y} \Sigma p + \frac{h_0^3}{8} (3\Sigma \eta^2 \Delta \eta + \Delta \eta^3) \partial_{x,y} \Delta p \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \left[-h^2 + \frac{h_0^2}{4} (\Delta \eta^2 + \Sigma \eta^2) \right] \Sigma a_{x,y} + \frac{h_0^2}{2} \Delta \eta \Sigma \eta \Delta a_{x,y} \right\} + \frac{h_0}{2} \Delta \eta \Delta b_{x,y} \\ &\quad + \left(-h + \frac{h_0}{2} \Sigma \eta \right) \Sigma b_{x,y}. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Pour alléger les calculs nous utilisons l'indice x, y pour signifier que nous pouvons choisir l'équation avec la variable x ou y .

Il nous faut déterminer les Δ et Σ des grandeurs p , a et b . Pour cela, nous partons du système d'équations synthétisant les conditions de non glissement sur les murs et sur la

B.2. CAS DE LA MEMBRANE BIDIMENSIONNELLE AVEC DES MURS RUGUEUX

membrane, la continuité du tenseur des contraintes et l'expression du débit j selon l'axe x et y

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{x+}|_{z=h_0\eta_+} = v_{c_x}, \\ v_{y+}|_{z=h_0\eta_+} = v_{c_y}, \\ v_{x-}|_{z=h_0\eta_-} = -v_{c_x}, \\ v_{y-}|_{z=h_0\eta_-} = -v_{c_y}, \\ v_{x+}|_{z=h} = v_{x-}|_{z=h}, \\ v_{y+}|_{z=h} = v_{y-}|_{z=h}, \\ p_+ - p_- = f_n \simeq f_z, \\ \mu\partial_z v_{x+}|_{z=h} - \mu\partial_z v_{x-}|_{z=h} = -f_{t_1} \simeq -f_x, \\ \mu\partial_z v_{y+}|_{z=h} - \mu\partial_z v_{y-}|_{z=h} = -f_{t_2} \simeq -f_y, \\ j_x = j_{x-} + j_{x+} = \int_{h_0\eta_-}^{h_0\eta_+} dz \, v_x, \\ j_y = j_{y-} + j_{y+} = \int_{h_0\eta_-}^{h_0\eta_+} dz \, v_y. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(B.24)} \\ \text{(B.25)} \\ \text{(B.26)} \\ \text{(B.27)} \\ \text{(B.28)} \\ \text{(B.29)} \\ \text{(B.30)} \\ \text{(B.31)} \\ \text{(B.32)} \\ \text{(B.33)} \\ \text{(B.34)} \end{array}$$

En remplaçant la vitesse par son expression le système d'équations devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h_0^2}{8\mu} [(\Delta\eta^2 + \Sigma\eta^2)\partial_{x,y}\Sigma p + 2\Delta\eta\Sigma\eta\partial_{x,y}\Delta p] + \frac{h_0}{2} (\Sigma\eta\Sigma a_{x,y} + \Delta\eta\Delta a_{x,y}) + \Sigma b_{x,y} \\ = 0, \\ \frac{h_0^2}{8\mu} [(\Delta\eta^2 + \Sigma\eta^2)\partial_{x,y}\Delta p + 2\Delta\eta\Sigma\eta\partial_{x,y}\Sigma p] + \frac{h_0}{2} (\Sigma\eta\Delta a_{x,y} + \Delta\eta\Sigma a_{x,y}) + \Delta b_{x,y} \\ = 2v_{c_{x,y}}, \\ \frac{h^2}{2\mu}\partial_{x,y}\Delta p + h\Delta a_{x,y} + \Delta b_{x,y} = 0, \\ \Delta p = f_z, \\ h\partial_{x,y}\Delta p + \mu\Delta a_{x,y} = -f_{x,y}, \\ j_{x,y} = \frac{1}{6\mu} \left\{ \frac{h_0^3}{8} (\Delta\eta^3 + 3\Delta\eta\Sigma\eta^2) \partial_{x,y}\Sigma p + \left[\frac{h_0^3}{8} (\Sigma\eta^3 + 3\Sigma\eta\Delta\eta^2) - h^3 \right] \partial_{x,y}\Delta p \right\} \\ \quad + \frac{1}{8} \{ 2h_0^2\Delta\eta\Sigma\eta\Sigma a_{x,y} + [h_0^2(\Delta\eta^2 + \Sigma\eta^2) - 4h^2] \Delta a_{x,y} \} \\ \quad + \frac{1}{2} [h_0\Delta\eta\Sigma b_{x,y} + (h_0\Sigma\eta - 2h)\Delta b_{x,y}]. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(B.35)} \\ \text{(B.36)} \\ \text{(B.37)} \\ \text{(B.38)} \\ \text{(B.39)} \\ \text{(B.40)} \end{array}$$

Les deux premières lignes du système sont obtenues en calculant la somme et la différence des équations (B.24) et (B.27).

Nous trouvons aisément que

$$\Delta p = f_z, \quad \text{(B.41)}$$

$$\Delta a_{x,y} = -\frac{h}{\mu}\partial_{x,y}f_z - \frac{f_{x,y}}{\mu}, \quad \text{(B.42)}$$

$$\Delta b_{x,y} = \frac{h^2}{2\mu}\partial_{x,y}f_z + \frac{h}{\mu}f_{x,y}. \quad \text{(B.43)}$$

ANNEXE B. DÉTAIL DE LA DÉRIVATION DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION

Ensuite, en calculant (B.40)- $h_0\Delta\eta/2$ (B.36) nous trouvons que

$$\begin{aligned} \partial_{x,y}\Sigma p = & -\frac{24\mu}{h_0^3\Delta\eta^3}j_{x,y} + \frac{4}{3\Delta\eta^3} \left[\frac{9}{4}\Delta\eta^2 \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right) - 3 \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^3 \right] \partial_{x,y}f_z \\ & - \frac{3}{h_0\Delta\eta^3} \left[4 \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^2 - \Delta\eta^2 \right] f_{x,y} \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

A partir de la relation (B.37) nous obtenons

$$\begin{aligned} \Sigma a_{x,y} = & \frac{12\Sigma\eta}{h_0^2\Delta\eta^3}j_{x,y} + \frac{4}{h_0\Delta\eta}v_{c_{x,y}} \\ & + \left[12\Sigma\eta \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^2 - 4\Delta\eta^2 \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right) - 6\frac{\Sigma\eta}{2}\Delta\eta^2 \right] \frac{1}{2\mu\Delta\eta^3}f_{x,y} \\ & + \left[8\Sigma\eta \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^3 - 4\Delta\eta^2 \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^2 - 6\Delta\eta^2\Sigma\eta \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right) - \Delta\eta^4 \right] \\ & \frac{h_0}{4\mu\Delta\eta^3}\partial_{x,y}f_z \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

et enfin

$$\begin{aligned} \Sigma b_{x,y} = & \frac{3}{h_0\Delta\eta^3}(\Delta\eta^2 - \Sigma\eta^2)j_{x,y} - 2\frac{\Sigma\eta}{\Delta\eta}v_{c_{x,y}} \\ & + \left[4(\Delta\eta^2 - \Sigma\eta^2) \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^3 + 4\Sigma\eta\Delta\eta^2 \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + (\Delta\eta^4 + 3\Delta\eta^2\Sigma\eta^2) \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right) + \Sigma\eta\Delta\eta^4 \right] \frac{h_0^2}{8\mu\Delta\eta^3}\partial_{x,y}f_z \\ & + \left[12(\Delta\eta^2 - \Sigma\eta^2) \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^2 + 8\Sigma\eta\Delta\eta^2 \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. + (\Delta\eta^4 + 3\Delta\eta^2\Sigma\eta^2) \right] \frac{h_0}{8\mu\Delta\eta^3}f_{x,y}. \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

Nous connaissons désormais toutes les grandeurs nécessaires pour retrouver l'équation d'évolution d'une membrane 2D cisailée par deux murs rugueux

$$\partial_t h = \partial_t \left(h_0 \frac{\Sigma\eta}{2} \right) - \nabla_{2D} \cdot [M_z \nabla_{2D} f_z + M_{xy} \mathbf{f}_{2D} + M_j \mathbf{j}] + \frac{\nu}{2} f_z + \mathbf{v}_c \cdot \nabla_{2D} M_{v_c} \quad (\text{B.47})$$

avec

$$M_z = \frac{h_0^3}{24\mu} \frac{\Delta\eta^3}{8} \left[1 - \frac{4}{\Delta\eta^2} \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^2 \right]^3, \quad (\text{B.48})$$

$$M_{xy} = -\frac{h_0^2}{8\mu} \frac{\Delta\eta}{2} \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right) \left[1 - \frac{4}{\Delta\eta^2} \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^2 \right]^2, \quad (\text{B.49})$$

B.2. CAS DE LA MEMBRANE BIDIMENSIONNELLE AVEC DES MURS RUGUEUX

$$M_j = -\frac{2}{\Delta\eta} \frac{3}{4} \left[\frac{4}{3\Delta\eta^2} \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^3 - \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right) \right], \quad (\text{B.50})$$

et

$$M_{v_c} = \frac{h_0}{\Delta\eta} \left[\frac{\Delta\eta^2}{4} - \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^2 \right]. \quad (\text{B.51})$$

Il suffit de prendre $v_c = 0$ pour retrouver l'équation (7.25) étudiée dans le chapitre 7.

Equation différentielle vérifiée par \mathbf{j}

Nous allons maintenant montrer comment retrouver l'équation différentielle (7.29) vérifier par le débit j . En différenciant les deux relations (B.20) et (B.21) nous obtenons

$$\nabla_{2D} \cdot \mathbf{j} + \nu \Sigma p - 2\nu p_{ext} = 0. \quad (\text{B.52})$$

Il suffit alors d'appliquer l'opérateur ∇_{2D} et de remplacer les $\partial_{x,y} \Sigma p$ par leurs expressions pour obtenir

$$\begin{aligned} \nabla_{2D}(\nabla_{2D} \cdot \mathbf{j}) - \frac{24\mu\nu}{h_0^3 \Delta\eta^3} \mathbf{j} &= \frac{4\nu}{\Delta\eta^3} \left[\left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^3 - \frac{3}{4} \Delta\eta^2 \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right) \right] \nabla_{2D} f_z \\ &+ \frac{3\nu}{h_0 \Delta\eta^3} \left[4 \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^2 - \Delta\eta^2 \right] \mathbf{f}_{2D}. \end{aligned}$$

Annexe C

Calcul du critère de stabilité pour un état stationnaire périodique

Dans cet appendice nous allons détailler les calculs pour les différentes méthodes qui nous amène au critère de stabilité des états stationnaires périodiques de longueurs d'onde λ obtenu dans la sous-section 3.3.2 et faisant intervenir la grandeur \mathcal{L}_λ .

C.1 Méthode de l'équation de phase

Nous allons d'abord présenter le cas général de la méthode de l'équation de phase développée par P. Politi et C. Misbah [78]. Cette méthode utilise les calculs multiéchelles [69], nous considérons la variable spatiale normale X et une variable spatiale dite lente $\tilde{X} = \epsilon X$, avec ϵ un petit paramètre, et nous travaillons comme si elles sont indépendantes l'une de l'autre. Nous faisons de même avec le temps et définissons $\tilde{T} = \epsilon^2 T$.

Nous considérons l'équation générale

$$\partial_T H = \tilde{\mathcal{N}}[H], \quad (\text{C.1})$$

avec $\tilde{\mathcal{N}}$ un opérateur non linéaire. La hauteur de la membrane pour notre problème vérifie bien ce genre d'équation dans le cas des murs très perméables et dans le cas des murs imperméables. Les variables utilisées seront la phase ϕ de la membrane et le vecteur d'onde q , avec $\phi = qX$ et $q = 2\pi/\lambda$. Nous définissons la phase lente $\tilde{\phi} = \epsilon\phi$. Dans ces nouvelles variables les dérivées temporelles et spatiales deviennent

$$\begin{cases} \partial_X = q\partial_\phi + \epsilon(\partial_{\tilde{X}\tilde{X}}\tilde{\phi})\partial_q, \\ \partial_T = \epsilon(\partial_{\tilde{T}\tilde{\phi}})\partial_\phi. \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

$$(\text{C.3})$$

Nous partons d'une membrane dans un état stationnaire périodique H_λ de longueur d'onde λ de hauteur moyenne nulle et ayant deux zéros par période. H_λ ne dépend pas que de la variable X . Cette membrane est alors perturbée à grande échelle (i.e. à l'échelle de la variable lente \tilde{X}) pour devenir

$$H = H_\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n H_n, \quad (\text{C.4})$$

ANNEXE C. CALCUL DU CRITÈRE DE STABILITÉ POUR UN ÉTAT STATIONNAIRE PÉRIODIQUE

où les H_n sont d'ordre 1. Nous pouvons de plus décomposer l'opérateur $\tilde{\mathcal{N}}$ de la manière suivante

$$\tilde{\mathcal{N}} = \tilde{\mathcal{N}}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \tilde{\mathcal{N}}_n, \quad (\text{C.5})$$

où les opérateurs $\tilde{\mathcal{N}}_n$ sont d'ordre 1.

L'ordre 0 de l'équation (C.1) donne simplement $\tilde{\mathcal{N}}_0[H_\lambda] = 0$ qui est l'équation vérifiée par les états stationnaires. Ensuite, le premier ordre de cette équation donne

$$\epsilon(\partial_{\tilde{T}}\tilde{\phi})\partial_\phi H_\lambda = (\tilde{\mathcal{N}}_0 + \epsilon\tilde{\mathcal{N}}_1)[H_\lambda + \epsilon H_1]. \quad (\text{C.6})$$

Nous utilisons ensuite la dérivée de Fréchet $\tilde{\mathcal{L}}_0$ définie comme suit

$$\tilde{\mathcal{N}}_0[H_\lambda + \epsilon H_1] = \tilde{\mathcal{N}}_0[H_\lambda] + \epsilon\tilde{\mathcal{L}}_0[H_1] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{C.7})$$

qui permet d'obtenir

$$\tilde{\mathcal{L}}_0[H_1] = (\partial_{\tilde{T}}\tilde{\phi})\partial_\phi H_\lambda - \tilde{\mathcal{N}}_1[H_\lambda] = g. \quad (\text{C.8})$$

L'alternative de Fredholm nous dit que cette dernière équation admet une solution seulement si g est orthogonal au noyau de l'opérateur adjoint $\tilde{\mathcal{L}}_0^\dagger$. Le produit scalaire entre deux fonctions f et g utilisé ici est $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi f^* g$. Nous considérons alors une fonction v telle que $\tilde{\mathcal{L}}_0^\dagger[v] = 0$. Nous avons donc

$$\langle v, \partial_\phi H_\lambda \rangle \partial_{\tilde{T}}\tilde{\phi} = \langle v, \tilde{\mathcal{N}}_1[H_\lambda] \rangle. \quad (\text{C.9})$$

Nous verrons que pour notre système $\tilde{\mathcal{N}}_1[H_\lambda]$ est proportionnel à $\partial_{\tilde{X}\tilde{X}}\tilde{\phi}$, l'équation (C.9) se met alors sous la forme d'une équation de diffusion. Le signe du coefficient de diffusion nous informe sur la stabilité du système.

Les opérateurs seront notés avec un indice NC dans le cas conservé et avec un indice C dans le cas conservé.

C.1.1 Cas non-conservé

Nous allons désormais appliquer la méthode à notre problème. Commençons par le cas non-conservé qui correspond à la limite des murs très perméables. Nous considérons le cas général d'une membrane avec une tension de surface σ . L'équation qui régit le système est

$$\partial_T H = -\partial_X^4 H + \sigma \partial_X^2 H - U'(H). \quad (\text{C.10})$$

A partir de l'équation (C.2) nous pouvons calculer

$$\begin{cases} \partial_X^2 = q^2 \partial_{\phi\phi} + \epsilon(\partial_{\tilde{X}\tilde{X}}\tilde{\phi})(2q\partial_q + 1)\partial_\phi \\ \partial_X^4 = q^4 \partial_\phi^4 + \epsilon(\partial_{\tilde{X}\tilde{X}}\tilde{\phi})q^2(4q\partial_q + 6)\partial_\phi^3. \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

$$\quad (\text{C.12})$$

L'équation d'évolution devient alors dans les nouvelles variables

$$\epsilon(\partial_{\tilde{T}}\tilde{\phi})\partial_\phi H = - \left[q^4 \partial_\phi^4 - \sigma q^2 \partial_{\phi\phi} + \epsilon(\partial_{\tilde{X}\tilde{X}}\tilde{\phi}) \{ -\sigma(2q\partial_q + 1)\partial_\phi + q^2(4q\partial_q + 6)\partial_\phi^3 \} \right] H - U'(H). \quad (\text{C.13})$$

C.1. MÉTHODE DE L'ÉQUATION DE PHASE

En reprenant les mêmes notations que précédemment nous pouvons écrire que

$$\tilde{\mathcal{N}}_0^{NC}[H_\lambda] = -U'(H_\lambda) + (\sigma q^2 \partial_{\phi\phi} - q^4 \partial_\phi^4) H_\lambda = 0 \quad (\text{C.14})$$

et en déduire que

$$\tilde{\mathcal{L}}_0^{NC}[H_1] = [-q^4 \partial_\phi^4 + \sigma q^2 \partial_{\phi\phi} - U''(H_\lambda)] H_1. \quad (\text{C.15})$$

Cet opérateur est auto-adjoint

$$\left(\tilde{\mathcal{L}}_0^{NC}\right)^\dagger = \tilde{\mathcal{L}}_0^{NC}. \quad (\text{C.16})$$

En dérivant la relation (C.14) par ϕ nous obtenons

$$0 = [-q^4 \partial_\phi^4 + \sigma q^2 \partial_{\phi\phi} - U''(H_\lambda)] \partial_\phi H_\lambda = \left(\tilde{\mathcal{L}}_0^{NC}\right)^\dagger [\partial_\phi H_\lambda]. \quad (\text{C.17})$$

Cela nous dit que $\partial_\phi H_\lambda$ fait parti du noyau de l'opérateur adjoint $\left(\tilde{\mathcal{L}}_0^{NC}\right)^\dagger$.

Il ne reste plus qu'à calculer $\tilde{\mathcal{N}}_1^{NC}[H_\lambda]$ obtenu en prenant le premier ordre de l'équation d'évolution

$$\tilde{\mathcal{N}}_1^{NC}[H_\lambda] = (\partial_{\tilde{X}\tilde{X}}\tilde{\phi}) [\sigma(2q\partial_q + 1)\partial_\phi - q^2(4q\partial_q + 6)\partial_\phi^3] H_\lambda. \quad (\text{C.18})$$

Enfin en remplaçant dans l'équation (C.9) nous obtenons l'équation de diffusion

$$\partial_{\tilde{T}}\tilde{\phi} = \frac{\langle \partial_\phi H_\lambda, [\sigma(2q\partial_q + 1)\partial_\phi - q^2(4q\partial_q + 6)\partial_\phi^3] H_\lambda \rangle}{\langle (\partial_\phi H_\lambda)^2 \rangle} (\partial_{\tilde{X}\tilde{X}}\tilde{\phi}) \quad (\text{C.19})$$

avec $\langle f \rangle = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} d\phi f$. Le coefficient de diffusion est égal à

$$D = \frac{\langle \partial_\phi H_\lambda, [\sigma(2q\partial_q + 1)\partial_\phi - q^2(4q\partial_q + 6)\partial_\phi^3] H_\lambda \rangle}{\langle (\partial_\phi H_\lambda)^2 \rangle}. \quad (\text{C.20})$$

Si $D > 0$ cela signifie que la phase lente $\tilde{\phi}$ va s'homogénéiser et donc la perturbation va décroître avec le temps, le système est donc stable. Dans le cas contraire le système sera instable.

Nous expliciterons l'expression de D dans les variables X et λ à la suite de l'étude du cas conservé.

C.1.2 Cas conservé

Nous avons obtenu l'expression du coefficient de diffusion D pour le cas non-conservé d'une membrane avec une tension. Examinons maintenant le cas conservé, c'est-à-dire les murs imperméables, toujours pour une membrane avec une tension σ . L'équation d'évolution est

$$\partial_T H = \partial_X \left[(1 - H^2)^3 \partial_X (\partial_X^4 H - \sigma \partial_{XX} H + U'(H)) \right], \quad (\text{C.21})$$

nous négligeons le terme avec le débit J car nous rappelons qu'il n'a pas d'influence notable sur la dynamique. Nous réutiliserons ici les résultats du cas non-conservé ci-dessus.

ANNEXE C. CALCUL DU CRITÈRE DE STABILITÉ POUR UN ÉTAT STATIONNAIRE PÉRIODIQUE

En utilisant toujours les mêmes notations, l'ordre 0 de l'équation d'évolution (C.21) donne

$$0 = \tilde{\mathcal{N}}_0^C[H_\lambda] = q\partial_\phi \left[(1 - H_\lambda^2)^3 q\partial_\phi (U'(H_\lambda) - \sigma q^2 \partial_{\phi\phi} H_\lambda + q^4 \partial_\phi^4 H_\lambda) \right]. \quad (\text{C.22})$$

H_λ est une fonction périodique donc cela implique directement que

$$B = U'(H_\lambda) + (-\sigma q^2 \partial_{\phi\phi} + q^4 \partial_\phi^4) H_\lambda, \quad (\text{C.23})$$

avec B une constante. Par imparité de H_λ les dérivées d'ordre paire sont nulle si $H_\lambda = 0$ et $U'(0) = 0$ donc

$$0 = U'(H_\lambda) + (-\sigma q^2 \partial_{\phi\phi} + q^4 \partial_\phi^4) H_\lambda. \quad (\text{C.24})$$

Nous avons bien les mêmes états stationnaires que pour le cas non-conservé. Nous trouvons ensuite que

$$\tilde{\mathcal{L}}_0^C[H_1] = -q^2 \partial_\phi \left\{ (1 - H_\lambda^2)^3 \partial_\phi \tilde{\mathcal{L}}_0^{NC}[H_1] \right\} \quad (\text{C.25})$$

dont nous calculons l'opérateur adjoint

$$\left(\tilde{\mathcal{L}}_0^C \right)^\dagger [w] = -q^2 \left(\tilde{\mathcal{L}}_0^{NC} \right)^\dagger \left[\partial_\phi \left\{ (1 - H_\lambda^2)^3 \partial_\phi w \right\} \right]. \quad (\text{C.26})$$

Connaissant le noyau de $\left(\tilde{\mathcal{L}}_0^{NC} \right)^\dagger$ nous en déduisons directement celui de $\left(\tilde{\mathcal{L}}_0^C \right)^\dagger$. Nous savons en particulier que $\partial_\phi H_\lambda$ appartient au noyau de $\left(\tilde{\mathcal{L}}_0^{NC} \right)^\dagger$ donc tous les w tels que $\partial_\phi \left\{ (1 - H_\lambda^2)^3 \partial_\phi w \right\} = \partial_\phi H_\lambda$ feront partie du noyau de $\left(\tilde{\mathcal{L}}_0^C \right)^\dagger$. Nous choisissons une fonction w qui vérifie

$$\partial_\phi w = \frac{H_\lambda}{(1 - H_\lambda^2)^3}. \quad (\text{C.27})$$

Le premier ordre de (C.21) amène à la relation

$$\begin{aligned} (\partial_{\tilde{T}} \tilde{\phi}) \partial_\phi H_\lambda = & q\partial_\phi \left\{ -(1 - H_\lambda^2)^3 q\partial_\phi \left[\tilde{\mathcal{L}}_0^{NC}[H_1] + (\partial_{\tilde{X}\tilde{X}} \tilde{\phi}) (\sigma(2q\partial_q + 1)\partial_\phi - q^2(4q\partial_q + 6q)\partial_\phi^3) H_\lambda \right] \right. \\ & + \left. \left((1 - H_\lambda^2)^3 (\partial_{\tilde{X}\tilde{X}} \tilde{\phi}) \partial_q - 6H_\lambda (1 - H_\lambda^2)^2 H_1 q\partial_\phi \right) [U'(H_\lambda) + (q^4 \partial_\phi^4 - \sigma q^2 \partial_{\phi\phi}) H_\lambda] \right\} \\ & + (\partial_{\tilde{X}\tilde{X}} \tilde{\phi}) \partial_q \left\{ (1 - H_\lambda^2)^3 q\partial_\phi [U'(H_\lambda) + (q^4 \partial_\phi^4 - \sigma q^2 \partial_{\phi\phi}) H_\lambda] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

qui se simplifie en utilisant la relation (C.24) de la manière suivante

$$\begin{aligned} -q^2 \partial_\phi \left\{ (1 - H_\lambda^2)^3 \partial_\phi \tilde{\mathcal{L}}_0^{NC}[H_1] \right\} = \tilde{\mathcal{L}}_0^C[H_1] = & -q^2 \partial_\phi \left\{ (1 - H_\lambda^2)^3 \partial_\phi \left[(\partial_{\tilde{X}\tilde{X}} \tilde{\phi}) (-\sigma(2q\partial_q + 1)\partial_\phi + q^2(4q\partial_q + 6q)\partial_\phi^3) H_\lambda \right] \right\} \\ & + (\partial_{\tilde{T}} \tilde{\phi}) \partial_\phi H_\lambda. \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

C.2. CALCUL DE LA VARIATION D'ÉNERGIE DES ÉTATS STATIONNAIRES H_λ

Nous en déduisons directement que

$$\tilde{\mathcal{N}}_1^C[H_\lambda] = q^2 \partial_\phi \left\{ (1 - H_\lambda^2)^3 \partial_\phi \left[(\partial_{\tilde{X}\tilde{X}} \tilde{\phi}) (-\sigma(2q\partial_q + 1)\partial_\phi + q^2(4q\partial_q + 6q)\partial_\phi^3) H_\lambda \right] \right\}. \quad (\text{C.30})$$

Nous réinjectons dans la relation (C.9)

$$\langle w, \partial_\phi H_\lambda \rangle \partial_{\tilde{T}} \tilde{\phi} = \left\langle w, q^2 \partial_\phi \left\{ (1 - H_\lambda^2)^3 \partial_\phi \left[(\partial_{\tilde{X}\tilde{X}} \tilde{\phi}) (-\sigma(2q\partial_q + 1)\partial_\phi + q^2(4q\partial_q + 6q)\partial_\phi^3) \partial_\phi^3 H_\lambda \right] \right\} \right\rangle \quad (\text{C.31})$$

qui, en utilisant (C.27) et la périodicité de H_λ , est équivalent à

$$\partial_{\tilde{T}} \tilde{\phi} = -q^2 \frac{\langle \partial_\phi H_\lambda, (-\sigma(2q\partial_q + 1)\partial_\phi + q^2(4q\partial_q + 6q)\partial_\phi^3) H_\lambda \rangle}{\left\langle \frac{H_\lambda}{(1-H_\lambda^2)^3}, H_\lambda \right\rangle} (\partial_{\tilde{X}\tilde{X}} \tilde{\phi}). \quad (\text{C.32})$$

Le coefficient de diffusion vaut

$$D = -q^2 \frac{\langle \partial_\phi H_\lambda, (-\sigma(2q\partial_q + 1)\partial_\phi + q^2(4q\partial_q + 6q)\partial_\phi^3) H_\lambda \rangle}{\left\langle \frac{H_\lambda}{(1-H_\lambda^2)^3}, H_\lambda \right\rangle}. \quad (\text{C.33})$$

C.1.3 Critère de stabilité

D sera du même signe que $-\langle \partial_\phi H_\lambda, (-\sigma(2q\partial_q + 1)\partial_\phi + q^2(4q\partial_q + 6q)\partial_\phi^3) H_\lambda \rangle$, exactement comme dans le cas non-conservé, le critère de stabilité est donc exactement le même dans les deux cas. Une longueur d'onde est stable si

$$-\langle \partial_\phi H_\lambda, (-\sigma(2q\partial_q + 1)\partial_\phi + q^2(4q\partial_q + 6q)\partial_\phi^3) H_\lambda \rangle > 0, \quad (\text{C.34})$$

qui correspond à un coefficient de diffusion positif. Nous pouvons remarquer que

$$\langle \partial_\phi H_\lambda, \sigma(2q\partial_q + 1)\partial_\phi H_\lambda \rangle = \sigma \partial_q (q \langle (\partial_\phi H_\lambda)^2 \rangle) \quad (\text{C.35})$$

et que

$$-q^2 \langle \partial_\phi H_\lambda, (4q\partial_q + 6)\partial_\phi^3 H_\lambda \rangle = q^2 (6 \langle (\partial_{\phi\phi} H_\lambda)^2 \rangle + 4q \langle \partial_{\phi\phi} H_\lambda, \partial_q \partial_{\phi\phi} H_\lambda \rangle) = 2\partial_q (q^3 \langle (\partial_{\phi\phi} H_\lambda)^2 \rangle). \quad (\text{C.36})$$

Enfin, en utilisant $\partial_q = -\frac{\lambda^2}{2\pi} \partial_\lambda$ et $\partial_\phi = \frac{1}{q} \partial_X$ nous arrivons au critère de stabilité suivant, une longueur d'onde est stable si

$$-\partial_\lambda [\lambda \langle 2(\partial_{XX} H_\lambda)^2 + \sigma(\partial_X H_\lambda)^2 \rangle] = -\partial_\lambda \left[\int_0^\lambda \{ 2(\partial_{XX} H_\lambda)^2 + \sigma(\partial_X H_\lambda)^2 \} \right] > 0. \quad (\text{C.37})$$

Nous retrouvons bien le même critère de stabilité que dans la sous-section 3.3.2.

C.2 Calcul de la variation d'énergie des états stationnaires H_λ

Dans cet appendice nous décrivons une autre façon de trouver le critère de stabilité des états stationnaires périodiques H_λ présenté dans la sous-section 3.3.2 à partir du calcul de la variation de l'énergie.

ANNEXE C. CALCUL DU CRITÈRE DE STABILITÉ POUR UN ÉTAT STATIONNAIRE PÉRIODIQUE

Les solutions H_λ sont les solutions stationnaires périodiques de longueurs d'onde λ . L'énergie d'une membrane dont la hauteur vaut $H = H_\lambda$ peut s'exprimer sous la forme

$$E_{mem} = \int d\tilde{X} \frac{1}{\lambda(\tilde{X})} \int_0^{\lambda(\tilde{X})} dX e_{\lambda(\tilde{X})}(X) = \int d\tilde{X} g_{\lambda(\tilde{X})} \quad (C.38)$$

où $\tilde{X} = \epsilon X$ est une variable spatiale lente et $e_{\lambda(\tilde{X})}$ est la densité d'énergie de la membrane. La longueur d'onde de la membrane est une fonction de \tilde{X} , c'est-à-dire qu'elle peut éventuellement varier mais seulement à grande échelle.

Pour obtenir le critère de stabilité nous allons perturber un état stationnaire parfaitement périodique de longueur d'onde $\bar{\lambda}$ ($\partial_{\tilde{X}} \bar{\lambda} = 0$). La perturbation considérée de la longueur d'onde $\delta\lambda$ est une fonction de la variable lente \tilde{X} . La longueur d'onde perturbée $\lambda(\tilde{X}) = \bar{\lambda} + \delta\lambda(\tilde{X})$ est donc une fonction de \tilde{X} , ses variations se font sur de grandes échelles spatiales. La variation de l'énergie de la membrane s'exprime

$$\delta E_{mem} = \int d\tilde{X} (g_{\bar{\lambda}+\delta\lambda} - g_{\bar{\lambda}}) = \int d\tilde{X} \left(\partial_{\bar{\lambda}} g_{\bar{\lambda}} \delta\lambda + \partial_{\bar{\lambda}\bar{\lambda}} g_{\bar{\lambda}} \frac{\delta\lambda^2}{2} + \mathcal{O}(\delta\lambda^3) \right). \quad (C.39)$$

Pour simplifier cette expression nous utilisons le fait que comme la perturbation $\delta\lambda(\tilde{X})$ est petite devant $\bar{\lambda}$, alors le nombre total de périodes N est constant et donc

$$\begin{aligned} 0 = \delta N &= \delta \left(\int d\tilde{X} \frac{1}{\lambda(\tilde{X})} \right) = \int d\tilde{X} \frac{1}{\bar{\lambda}} \left[-\frac{\delta\lambda}{\bar{\lambda}} + \frac{\delta\lambda^2}{\bar{\lambda}^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\delta\lambda^3}{\bar{\lambda}^3}\right) \right] \\ &\Rightarrow \bar{\lambda} \int d\tilde{X} \delta\lambda = \int d\tilde{X} \delta\lambda^2 + \mathcal{O}\left(\frac{\delta\lambda^3}{\bar{\lambda}}\right). \end{aligned} \quad (C.40)$$

En remplaçant dans l'équation (C.39) cela donne

$$\begin{aligned} \delta E_{mem} &= \frac{1}{\bar{\lambda}^2} (2\bar{\lambda} \partial_{\bar{\lambda}} g_{\bar{\lambda}} + \bar{\lambda}^2 \partial_{\bar{\lambda}\bar{\lambda}} g_{\bar{\lambda}}) \int d\tilde{X} \frac{\delta\lambda^2}{2} + \mathcal{O}(\delta\lambda^3) \\ &= \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \partial_{\bar{\lambda}} (\bar{\lambda}^2 \partial_{\bar{\lambda}} g_{\bar{\lambda}}) \int d\tilde{X} \frac{\delta\lambda^2}{2} + \mathcal{O}(\delta\lambda^3) \\ &= \frac{\partial_{\bar{\lambda}} \mathcal{L}_{\bar{\lambda}}}{\bar{\lambda}^2} \int d\tilde{X} \delta\lambda(\tilde{X})^2 + \mathcal{O}(\delta\lambda^3), \end{aligned} \quad (C.41)$$

avec $\mathcal{L}_{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda}^2 \partial_{\bar{\lambda}} g_{\bar{\lambda}}/2$.

Si $\partial_{\bar{\lambda}} \mathcal{L}_{\bar{\lambda}} > 0$ alors l'énergie de la membrane perturbée est plus élevée ($\delta E_{mem} > 0$), donc la perturbation va décroître, la longueur d'onde est stable. Si au contraire $\partial_{\bar{\lambda}} \mathcal{L}_{\bar{\lambda}} < 0$, alors la membrane perturbée est favorisée énergétiquement ($\delta E_{mem} < 0$), la perturbation va croître, la longueur d'onde est instable. Il reste désormais à obtenir l'expression de $\mathcal{L}_{\bar{\lambda}}$.

Nous considérons le cas général où la densité d'énergie de la membrane est

$$e_{\bar{\lambda}} = - \sum_i \frac{1}{2} (-1)^i a_{2i} (\partial_X^i H_{\bar{\lambda}})^2 + U(H_{\bar{\lambda}}) \quad (C.42)$$

C.2. CALCUL DE LA VARIATION D'ÉNERGIE DES ÉTATS STATIONNAIRES $H_{\bar{\lambda}}$

avec les a_{2i} des constantes. Les équations d'évolution de la membrane dans le cas non-conservé et conservé respectivement seront pour cette énergie

$$\begin{cases} \partial_T H = \sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} H - U'(H), \end{cases} \quad (\text{C.43})$$

$$\begin{cases} \partial_T H = \partial_X \left[(1 - H^2)^3 \partial_X \left(- \sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} H + U'(H) \right) \right]. \end{cases} \quad (\text{C.44})$$

Nous avons donc

$$g_{\bar{\lambda}} = \frac{1}{\bar{\lambda}} \int_0^{\bar{\lambda}} dX \left[- \sum_i \frac{1}{2} (-1)^i a_{2i} (\partial_X^i H_{\bar{\lambda}})^2 + U(H_{\bar{\lambda}}) \right]. \quad (\text{C.45})$$

Pour faciliter le calcul nous réalisons le changement de variable $u = X/\bar{\lambda}$ qui donne

$$g_{\bar{\lambda}} = \int_0^1 du \left[- \sum_i \frac{1}{2\bar{\lambda}^{2i}} (-1)^i a_{2i} (\partial_u^i H_{\bar{\lambda}})^2 + U(H_{\bar{\lambda}}) \right] \quad (\text{C.46})$$

En dérivant par $\bar{\lambda}$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{\lambda}} g_{\bar{\lambda}} &= \int_0^1 du \left[\sum_i \frac{i}{\bar{\lambda}^{2i+1}} (-1)^i a_{2i} (\partial_u^i H_{\bar{\lambda}})^2 - \sum_i \frac{1}{\bar{\lambda}^{2i}} (-1)^i a_{2i} (\partial_u^i H_{\bar{\lambda}}) (\partial_{\bar{\lambda}} \partial_u^i H_{\bar{\lambda}}) \right. \\ &\quad \left. + U'(H_{\bar{\lambda}}) \partial_{\bar{\lambda}} H_{\bar{\lambda}} \right] \\ &= \int_0^1 du \left[\sum_i \frac{i}{\bar{\lambda}^{2i+1}} (-1)^i a_{2i} (\partial_u^i H_{\bar{\lambda}})^2 + \left(- \sum_i \frac{1}{\bar{\lambda}^{2i}} a_{2i} (\partial_u^{2i} H_{\bar{\lambda}}) + U'(H_{\bar{\lambda}}) \right) \partial_{\bar{\lambda}} H_{\bar{\lambda}} \right] \\ &= \frac{1}{\bar{\lambda}} \int_0^{\bar{\lambda}} dX \left[\sum_i \frac{i}{\bar{\lambda}} (-1)^i a_{2i} (\partial_X^i H_{\bar{\lambda}})^2 + \left(- \sum_i a_{2i} (\partial_X^{2i} H_{\bar{\lambda}}) + U'(H_{\bar{\lambda}}) \right) \partial_{\bar{\lambda}} H_{\bar{\lambda}} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

où nous avons utilisé la périodicité de $H_{\bar{\lambda}}$ dans les intégrations par partie. Comme les $H_{\bar{\lambda}}$ sont des solutions stationnaires et périodiques elles vérifient d'après les deux équations d'évolution (C.43) et (C.44)

$$- \sum_i a_{2i} (\partial_X^{2i} H_{\bar{\lambda}}) + U'(H_{\bar{\lambda}}) = 0. \quad (\text{C.48})$$

Finalement

$$\mathcal{L}_{\bar{\lambda}} = \frac{1}{2} \int_0^{\bar{\lambda}} dX \sum_i i (-1)^i a_{2i} (\partial_X^i H_{\bar{\lambda}})^2. \quad (\text{C.49})$$

Une longueur d'onde est stable si $\partial_{\bar{\lambda}} \mathcal{L}_{\bar{\lambda}} > 0$.

Dans le cas d'une membrane avec une rigidité de courbure sans tension, tous les a_{2i} sont nuls sauf a_4 qui vaut -1 nous retrouvons bien

$$\mathcal{L}_{\bar{\lambda}} = - \int_0^{\bar{\lambda}} dX (\partial_X^2 H_{\bar{\lambda}})^2 \quad (\text{C.50})$$

qui correspond à l'expression (3.35). Pour une membrane avec une tension σ nous avons $a_2 = \sigma$ et nous retrouvons bien le critère de stabilité (C.37).

Annexe D

Dérivation des modèles de kinks

Dans cet appendice nous allons détailler la dérivation de la dynamique des différents modèles de kinks présentés dans le chapitre 4. Nous gardons les mêmes notations.

D.1 Modèle de Kawasaki et Ohta

Nous allons commencer par présenter la dérivation du modèle de kinks de Kawasaki et Ohta. Nous présenterons ensuite le nouveau modèle que nous proposons pour la dynamique des kinks.

D.1.1 Cas non-conservé

Etudions dans un premier temps le cas non-conservé. L'équation générale d'évolution s'écrit

$$\partial_T H = -U'(H) + L_{in}[H]$$

avec

$$L_{in}[H] = \sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} H.$$

Nous rappelons que l'ansatz de départ du modèle est que proche du n -ième kink

$$H(X, T) = H_n(X, T) + \epsilon(X)$$

avec

$$\epsilon(X) = \sum_{k>n} [H_k(X, T) - H_k(-\infty)] + \sum_{k<n} [H_k(X, T) - H_k(+\infty)].$$

X_k est la position du k -ième kink et les kinks sont éloignés les uns des autres, i.e. $X_{k+1} - X_k \ll a$ avec a la largeur d'un kink. De plus $H_k(X, T) = \pm H^0(X - X_k(T))$ selon que k corresponde à un kink ou un antikink. H^0 est la solution stationnaire à un zéro qui vérifie $H^0(\pm\infty) = \pm H_m$. Nous ferons l'hypothèse que les k pairs correspondent à des kinks et les k impairs à des antikinks.

Nous faisons l'hypothèse que les kinks se déplacent sans modification du profil, ce qui permet d'écrire que

$$\partial_T H = - \sum_k \dot{X}_k \partial_X H_k. \quad (D.1)$$

ANNEXE D. DÉRIVATION DES MODÈLES DE KINKS

Nous cherchons à obtenir la vitesse du kink n . Multiplions l'équation d'évolution par $\partial_X H_n$ et intégrons sur tout l'espace, nous obtenons

$$-\sum_k \dot{X}_k \int_{-\infty}^{+\infty} dX \partial_X H_n \partial_X H_k = \int_{-\infty}^{+\infty} dX \partial_X H_n \left[-U'(H) + \sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} H \right] = I. \quad (\text{D.2})$$

Réarrangeons le terme de droite

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dX \partial_X H_n \left[-U'(H_n) - \epsilon U''(H_n) - U'_{nl n} + \sum_{k \neq n} \sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} H_k + \sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} H_n \right], \quad (\text{D.3})$$

où $U'_{nl n} = U'(H) - U'(H_n) - \epsilon U''(H_n)$.

H_n est une solution stationnaire, donc elle vérifie

$$0 = -U'(H_n) + \sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} H_n. \quad (\text{D.4})$$

De plus, nous pouvons dire que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dX \partial_X H_n \left[\sum_{k \neq n} \sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} H_k - \epsilon U''(H_n) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dX \partial_X H_n \left[\sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} \epsilon - \epsilon U''(H_n) \right] \\ &\stackrel{IPP}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dX \epsilon \left[\sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} \partial_X H_n - \partial_X H_n U''(H_n) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dX \epsilon \partial_X \left[\sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} H_n - U'(H_n) \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Donc finalement il reste

$$I = - \int_{-\infty}^{+\infty} dX \partial_X H_n U'_{nl n}. \quad (\text{D.6})$$

Nous rappelons que $U'_{nl n} = U'(H) - U'(H_n) - \epsilon U''(H_n)$, cela se met sous la forme

$$U'_{nl n} = F(H_n, \epsilon) \quad (\text{D.7})$$

avec $F(X, Y) = U'(X + Y) - U'(X) - Y U''(X)$. En réinjectant dans l'expression (D.6) nous avons

$$\begin{aligned} I &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dX \partial_X H_n F(H_n, \epsilon) \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dX \partial_X H_n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\epsilon^p}{p!} \partial_Y^p F(H_n, Y)|_{Y=0}. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

D.1. MODÈLE DE KAWASAKI ET OHTA

Kawasaki et Ohta ne gardent que les termes de la somme pour $p \leq 1$, donc en reprenant l'expression de ϵ

$$\begin{aligned}
I &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dX \partial_X H_n \left\{ \sum_{k>n} [F(H_n, 0) + (H_k - H_k(-\infty)) \partial_Y F(H_n, Y)|_{Y=0}] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k<n} [F(H_n, 0) + (H_k - H_k(+\infty)) \partial_Y F(H_n, Y)|_{Y=0}] \right\} \\
&= - \sum_{k>n} \int_{-\infty}^{+\infty} dX \partial_X H_n F(H_n, H_k - H_k(-\infty)) \\
&\quad - \sum_{k<n} \int_{-\infty}^{+\infty} dX \partial_X H_n F(H_n, H_k - H_k(+\infty)).
\end{aligned} \tag{D.9}$$

Nous faisons l'approximation que pour les $k > n$, $H_k - H_k(-\infty) = 0$ pour $X < X_k$ et $H_k - H_k(-\infty) = (-1)^k \Delta H = (-1)^k 2H_m$ pour $X > X_k$. Pour les $k < n$, nous avons $H_k - H_k(+\infty) = (-1)^{k+1} \Delta H$ pour $X < X_k$ et $H_k - H_k(+\infty) = 0$ pour $X > X_k$. L'expression de I devient

$$I = - \sum_{k>n} \int_{X_k}^{+\infty} dX \partial_X H_n F(H_n, (-1)^k \Delta H) - \sum_{k<n} \int_{-\infty}^{X_k} dX \partial_X H_n F(H_n, (-1)^{k+1} \Delta H) \tag{D.10}$$

car $F(X, 0) = 0$.

Nous posons $\tilde{F}(X, Y)$ de telle sorte que $\partial_X \tilde{F}(X, Y) = F(X, Y)$. Nous pouvons choisir

$$\tilde{F}(X, Y) = U(X + Y) - U(X) - YU'(X). \tag{D.11}$$

Il s'en suit que dans l'approximation des kinks éloignés

$$\begin{aligned}
I &= - \sum_{k>n} \int_{X_k}^{+\infty} dX \partial_X \tilde{F}(H_n, (-1)^k \Delta H) - \sum_{k<n} \int_{-\infty}^{X_k} dX \partial_X \tilde{F}(H_n, (-1)^{k+1} \Delta H) \\
&= - \sum_{k>n} \left[\tilde{F}(H_n(+\infty), (-1)^k \Delta H) - \tilde{F}(H_n(X_k), (-1)^k \Delta H) \right] \\
&\quad - \sum_{k<n} \left[\tilde{F}(H_n(X_k), (-1)^{k+1} \Delta H) - \tilde{F}(H_n(-\infty), (-1)^{k+1} \Delta H) \right] \\
&\simeq \sum_{k>n} [H_n(X_k) - H_n(+\infty)] F(H_n(+\infty), (-1)^k \Delta H) \\
&\quad - \sum_{k<n} [H_n(X_k) - H_n(-\infty)] F(H_n(-\infty), (-1)^{k+1} \Delta H).
\end{aligned} \tag{D.12}$$

Nous ne considérons que les contributions des plus proches voisins et négligeons les autres termes pour trouver

$$I = (H_n(X_{n+1}) - H_n(+\infty))(-1)^n \Delta H U_m'' + (H_n(X_{n-1}) - H_n(-\infty))(-1)^n \Delta H U_m'' \tag{D.13}$$

où U_m'' est la dérivée seconde du potentiel en $\pm H_m$.

ANNEXE D. DÉRIVATION DES MODÈLES DE KINKS

Si R est la fonction qui décrit le profil des plateaux des kinks, alors

$$H_n(X_{n+1}) - H_n(+\infty) = (-1)^n R(X_{n+1} - X_n) \quad (\text{D.14})$$

et

$$H_n(X_{n-1}) - H_n(-\infty) = (-1)^{n+1} R(X_n - X_{n-1}). \quad (\text{D.15})$$

Enfin, nous négligeons le produit $\partial_X H_n \partial_X H_k$ si $k \neq n$, l'équation (D.2) devient

$$\dot{X}_n = -\frac{U_m'' \Delta H}{\int dX (\partial_X H_n)^2} [R(l_{n+1/2}) - R(l_{n-1/2})] \quad (\text{D.16})$$

avec $l_{n+1/2} = X_{n+1} - X_n$.

D.1.2 Cas conservé

Nous venons de montrer le calcul pour le cas non-conservé, dérivons désormais le modèle de Kawasaki et Ohta pour le cas conservé. Nous partons de l'équation d'évolution

$$\partial_T H = -\partial_X [M(H) \partial_X (-U'(H) + L_{in}[H])]$$

avec

$$L_{in}[H] = \sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} H.$$

Nous reprenons l'ansatz de départ du modèle

$$H(X, T) = H_n(X, T) + \epsilon(X)$$

avec

$$\epsilon(X) = \sum_{k>n} [H_k(X, T) - H_k(-\infty)] + \sum_{k<n} [H_k(X, T) - H_k(+\infty)].$$

et nous rappelons que nous considérons que les kinks se déplacent à profil constant. Nous pouvons donc écrire que

$$-\sum_k \dot{X}_k \partial_X H_k = -\partial_X \left[M(H) \partial_X \left(-U'(H) + \sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} H \right) \right] \quad (\text{D.17})$$

Nous multiplions cette équation par $\partial_X \tilde{H}_n$ (nous expliciterons \tilde{H}_n plus tard) et intégrons sur tout l'espace pour obtenir

$$\begin{aligned} \sum_k \dot{X}_k \int_{-\infty}^{+\infty} dX \partial_X \tilde{H}_n \partial_X H_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} dX \partial_X \tilde{H}_n \partial_X \left[M(H) \partial_X \left(-U'(H) + \sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} H \right) \right] \\ &= I. \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

D.1. MODÈLE DE KAWASAKI ET OHTA

Pour le calcul de I nous réutilisons la fonction $U'_{nl n} = U'(H) - U'(H_n) - \epsilon U''(H_n)$. En réinjectant cela donne

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dX \partial_X \tilde{H}_n \times \partial_X \left[M(H) \partial_X \left(-U'(H_n) - \epsilon U''(H_n) - U'_{nl n} + \sum_{k \neq n} \sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} H_k + \sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} H_n \right) \right] \quad (D.19)$$

qui se simplifie car H_n est un état stationnaire en

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} dX \partial_X \tilde{H}_n \partial_X \left[M(H) \partial_X \left(-\epsilon U''(H_n) - U'_{nl n} + \sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} \epsilon \right) \right] \\ &\stackrel{IPP}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dX \left[\epsilon \left(-U''(H_n) + \sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} \right) - U'_{nl n} \right] \partial_X \left[M(H) \partial_{XX} \tilde{H}_n \right]. \end{aligned} \quad (D.20)$$

Si nous choisissons \tilde{H}_n de telle sorte que $\partial_X \left[M(H) \partial_{XX} \tilde{H}_n \right] = \partial_X H_n$, alors il reste

$$I = - \int_{-\infty}^{+\infty} dX U'_{nl n} \partial_X H_n \quad (D.21)$$

que nous avons déjà calculé pour la dérivation du cas non-conservé, le résultat est donné par l'expression (D.13).

Il nous reste à évaluer la grandeur

$$\sum_k \dot{X}_k \int_{-\infty}^{+\infty} dX \partial_X \tilde{H}_n \partial_X H_k = I. \quad (D.22)$$

I est d'ordre 1 car proportionnel au profil R de la queue des kinks. De plus nous considérons que les vitesses des kinks sont également d'ordre 1, il nous suffit donc d'évaluer les

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dX \partial_X \tilde{H}_n \partial_X H_k \quad (D.23)$$

à l'ordre 0. Nous rappelons que \tilde{H}_n vérifie

$$\partial_X \left[M(H) \partial_{XX} \tilde{H}_n \right] = \partial_X H_n, \quad (D.24)$$

donc nous pouvons choisir \tilde{H}_n de telle sorte que

$$\partial_X \tilde{H}_n = \int_{X_n}^X dX' \frac{H_n}{M(H)}. \quad (D.25)$$

De plus, dans la limite des kinks très éloignés, nous négligeons l'épaisseur a des kinks et approximations la dérivée par

$$\partial_X H_k \simeq (-1)^k (\Delta H) \delta(X - X_k) \quad (D.26)$$

ANNEXE D. DÉRIVATION DES MODÈLES DE KINKS

si les k pairs correspondent à des kinks et les k impairs à des antikinks. δ est la distribution de Dirac. En réinjectant dans l'équation (D.22) il reste à l'ordre 0

$$I = \sum_k \dot{X}_k (-1)^{n+k} \frac{(\Delta H)^2}{M(H_m)} \frac{|X_n - X_k|}{2} = U_m'' \Delta H [R(l_{n+1/2}) - R(l_{n-1/2})]. \quad (\text{D.27})$$

Pour isoler les \dot{X}_k , cela revient à inverser le système $\bar{\bar{A}} \dot{X} = \bar{R}$

$$\bar{\bar{A}}_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{(\Delta H)^2}{M(H_m)} \frac{|X_i - X_j|}{2} \quad (\text{D.28})$$

et

$$\bar{R}_i = U_m'' \Delta H [R(l_{i+1/2}) - R(l_{i-1/2})]. \quad (\text{D.29})$$

La matrice $\bar{\bar{A}}$ est inversée dans la référence [47], le résultat final est

$$\dot{X}_n = -\frac{U_m'' M(H_m)}{\Delta H} \left[\frac{1}{l_{n+1/2}} (R(l_{n+3/2}) - R(l_{n-1/2})) + \frac{1}{l_{n-1/2}} (R(l_{n+1/2}) - R(l_{n-3/2})) \right]. \quad (\text{D.30})$$

D.2 Nouveau modèle

Nous connaissons désormais la dérivation du modèle de Kawasaki et Ohta. Analysons maintenant le nouveau modèle que nous proposons dans la section 4.2. Nous ne détaillerons ici que le cas conservé correspondant à des murs imperméables, le cas non-conservé est déjà détaillé dans le texte principal.

La dynamique de la membrane dans le cas conservé est régie par l'équation (4.3) que nous rappelons ci-dessous

$$\partial_T H = -\partial_X [M(H) \partial_X (-U'(H) + L_{in}[H])]$$

avec

$$L_{in}[H] = \sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} H.$$

Dans ce calcul nous considérons que les kinks se déplacent sans se déformer, nous faisons donc l'approximation que $\partial_T H = -\dot{X}_n \partial_X H$. Nous remplaçons dans l'équation d'évolution et nous l'intégrons entre $X_{n-1/2}$ et X ($X_n < X < X_{n+1}$). Cela donne

$$-\dot{X}_n (H - H_{n-1/2}) = -j^{kink}(X) + j_{n-1/2}^{kink} \quad (\text{D.31})$$

avec

$$j^{kink}(X) = M(H) \partial_X \left(\sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} H - U'(H) \right). \quad (\text{D.32})$$

L'indice $n-1/2$ signifie que nous prenons la valeur en $X = X_{n-1/2}$. Nous pouvons intégrer une seconde fois, toujours entre $X_{n-1/2}$ et X , pour obtenir

$$-\dot{X}_n \int_{n-1/2}^X dX' \frac{(H - H_{n-1/2})}{M(H)} = -\mu^{kink}(X) + \mu_{n-1/2}^{kink} + j_{n-1/2}^{kink} \int_{n-1/2}^X dX' \frac{1}{M(H)}, \quad (\text{D.33})$$

D.2. NOUVEAU MODÈLE

avec

$$\mu^{kink}(X) = \sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} H - U'(H). \quad (D.34)$$

Nous multiplions ensuite par $\partial_X H$ et intégrons entre $X_{n-1/2}$ et $X_{n+1/2}$

$$\begin{aligned} -\dot{X}_n \int_{n-1/2}^{n+1/2} dX \partial_X H \int_{n-1/2}^X dX' \frac{(H - H_{n-1/2})}{M(H)} = \\ \left[-\sum_i a_{2i} \left(\frac{(-1)^{i-1}}{2} (\partial_X^i H)^2 - \sum_{k=1}^{k < i/2} \partial_X^{2k} H \partial_X^{2i-2k} H \right) + U(H) \right]_{n-1/2}^{n+1/2} \\ + j_{n-1/2}^{kink} \int_{n-1/2}^{n+1/2} dX \partial_X H \int_{n-1/2}^X dX' \frac{1}{M(H)} + \mu_{n-1/2}^{kink} [H]_{n-1/2}^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (D.35)$$

où nous avons intégré par partie et utilisé le fait que par symétrie les dérivées d'ordre impaire sont nulles en $X_{n\pm 1/2}$.

Nous posons ensuite $A_n = \int_{n-1/2}^{n+1/2} dX \partial_X H \int_{n-1/2}^X dX' (H - H_{n-1/2})/M(H)$ et $B_n = \int_{n-1/2}^{n+1/2} dX \partial_X H \int_{n-1/2}^X dX' 1/M(H)$, l'équation (D.35) se réécrit

$$\begin{aligned} -\dot{X}_n A_n = \left[-\sum_i a_{2i} \left(\frac{(-1)^{i-1}}{2} (\partial_X^i H)^2 - \sum_{k=1}^{k < i/2} \partial_X^{2k} H \partial_X^{2i-2k} H \right) + U(H) \right]_{n-1/2}^{n+1/2} \\ + j_{n-1/2}^{kink} B_n + \mu_{n-1/2}^{kink} [H]_{n-1/2}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (D.36)$$

Si nous refaisons toutes ces étapes mais en intégrant entre X et $X_{n+1/2}$ cette fois nous aboutissons à la relation

$$\begin{aligned} -\dot{X}_n A_n = \left[-\sum_i a_{2i} \left(\frac{(-1)^{i-1}}{2} (\partial_X^i H)^2 - \sum_{k=1}^{k < i/2} \partial_X^{2k} H \partial_X^{2i-2k} H \right) + U(H) \right]_{n-1/2}^{n+1/2} \\ + j_{n+1/2}^{kink} B'_n + \mu_{n+1/2}^{kink} [H]_{n-1/2}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (D.37)$$

avec $B'_n = -\int_{n-1/2}^{n+1/2} dX \partial_X H \int_X^{n+1/2} dX' 1/(1-H^2)^3$. Nous sommons la relation (D.36) appliquée au kink n et la relation (D.37) appliquée au kink $n-1$ pour obtenir

$$\begin{aligned} -\dot{X}_n A_n - \dot{X}_{n-1} A_{n-1} = \left[-\sum_i a_{2i} \left(\frac{(-1)^{i-1}}{2} (\partial_X^i H)^2 - \sum_{k=1}^{k < i/2} \partial_X^{2k} H \partial_X^{2i-2k} H \right) + U(H) \right]_{n-3/2}^{n+1/2} \\ + j_{n-1/2}^{kink} (B_n + B'_{n-1}) + \mu_{n-1/2}^{kink} [H]_{n-3/2}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (D.38)$$

De l'équation (D.31) il vient la relation suivante

$$\dot{X}_n [H]_{n-1/2}^{n+1/2} = j_{n+1/2}^{kink} - j_{n-1/2}^{kink} \quad (D.39)$$

ANNEXE D. DÉRIVATION DES MODÈLES DE KINKS

dont nous déduisons directement la dynamique de kink

$$\begin{aligned}
\dot{X}_n [H]_{n-1/2}^{n+1/2} &= -\dot{X}_n A_n \left(\frac{1}{B_{n+1} + B'_n} - \frac{1}{B_n + B'_{n-1}} \right) \\
&+ \frac{1}{B_{n+1} + B'_n} \times \\
&\left\{ -\dot{X}_{n+1} A_{n+1} + \left[\sum_i a_{2i} \left(\frac{(-1)^{i-1}}{2} (\partial_X^i H)^2 - \sum_{k=1}^{k < i/2} \partial_X^{2k} H \partial_X^{2i-2k} H \right) - U(H) \right]_{n-1/2}^{n+3/2} \right. \\
&\left. - \mu_{n+1/2}^{kink} [H]_{n-1/2}^{n+3/2} \right\} \\
&- \frac{1}{B_n + B'_{n-1}} \times \\
&\left\{ -\dot{X}_{n-1} A_{n-1} + \left[\sum_i a_{2i} \left(\frac{(-1)^{i-1}}{2} (\partial_X^i H)^2 - \sum_{k=1}^{k < i/2} \partial_X^{2k} H \partial_X^{2i-2k} H \right) - U(H) \right]_{n-3/2}^{n+1/2} \right. \\
&\left. - \mu_{n-1/2}^{kink} [H]_{n-3/2}^{n+1/2} \right\}
\end{aligned} \tag{D.40}$$

Il s'agit désormais de simplifier cette équation. Si les n impairs correspondent à des antikinks, alors nous avons à l'ordre dominant, $[H]_{n-1/2}^{n+1/2} = (-1)^n \Delta H$, où $\Delta H = 2H_m$ est la distance entre les deux minimums du potentiel $U(H)$. De plus à l'ordre dominant nous avons $H_{n+1/2} = H_{n+1/2+2}$. Il s'en suit que

$$\begin{aligned}
B_{n+1} + B'_n &= \int_{n-1/2}^{n+3/2} dX \partial_X H \int_{n+1/2}^X dX' \frac{1}{M(H)} \\
&\stackrel{IPP}{=} H_{n+3/2} \int_{n+1/2}^{n+3/2} dX \frac{1}{M(H)} + H_{n-1/2} \int_{n-1/2}^{n+1/2} dX \frac{1}{M(H)} \\
&\quad - \int_{n-1/2}^{n+3/2} dX \frac{H}{M(H)} \\
&\stackrel{\text{ordre dom.}}{\simeq} \int_{n-1/2}^{n+3/2} dX \frac{H_{n+3/2} - H}{M(H)} \\
&\stackrel{\text{ordre dom.}}{\simeq} (-1)^{n+1} \Delta H \frac{(X_{n+1} - X_n)}{M(H_m)}.
\end{aligned} \tag{D.41}$$

Nous nous arrêtons ici à l'ordre dominant car les autres termes dans l'équation (D.40) sont tous au moins de l'ordre supérieur. En effet, nous rappelons que les kinks étant considérés éloignés, leur profil vérifie à l'ordre dominant l'équation des états stationnaires

$$0 = \sum_i a_{2i} \partial_X^{2i} H - U'(H), \tag{D.42}$$

donc les $j_{n+1/2}^{kink}$ (et donc les \dot{X}_n) et les $\mu_{n+1/2}^{kink}$ sont d'ordre supérieur. De plus, l'expression de la hauteur H peut être approximée sur les plateaux par $H = (-1)^n (H_m + \delta H)$ entre

D.2. NOUVEAU MODÈLE

X_n et X_{n+1} si les n impaires correspondent à des antikinks. Donc $[H]_{n-3/2}^{n+1/2}$ est d'ordre 1 en δH , nous négligeons donc les termes en $\mu_{n+1/2}^{kink}$ qui seront d'ordre au moins 2 en δH , et $[H]_{n-1/2}^{n+1/2} \simeq (-1)^n \Delta H$. Finalement l'équation de la dynamique de kinks devient

$$\begin{aligned} \dot{X}_n = & \frac{\dot{X}_n A_n M(H_m)}{\Delta H^2} \left(\frac{1}{X_{n+1} - X_n} + \frac{1}{X_n - X_{n-1}} \right) \\ & - \frac{M(H_m)}{\Delta H^2 (X_{n+1} - X_n)} \times \\ & \left(-\dot{X}_{n+1} A_{n+1} + \left[\sum_i a_{2i} \left(\frac{(-1)^{i-1}}{2} (\partial_X^i H)^2 - \sum_{k=1}^{k < i/2} \partial_X^{2k} H \partial_X^{2i-2k} H \right) - U(H) \right]_{n-1/2}^{n+3/2} \right) \\ & - \frac{M(H_m)}{\Delta H^2 (X_n - X_{n-1})} \times \\ & \left(-\dot{X}_{n-1} A_{n-1} + \left[\sum_i a_{2i} \left(\frac{(-1)^{i-1}}{2} (\partial_X^i H)^2 - \sum_{k=1}^{k < i/2} \partial_X^{2k} H \partial_X^{2i-2k} H \right) - U(H) \right]_{n-3/2}^{n+1/2} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

La dernière étape consiste à approximer la hauteur de la membrane par $H = (-1)^n (H_m + R(X - X_n) + R(X_{n+1} - X))$ entre X_n et X_{n+1} avec les antikinks correspondant aux n impaires. Nous rappelons que R est la queue des solutions stationnaires de kink et est d'ordre 1. En posant $l_{n+1/2} = X_{n+1} - X_n$ nous retrouvons la dynamique de kinks finale (D.44)

$$\begin{aligned} \dot{X}_n = & \frac{M(H_m)}{(\Delta H)^2} \times \\ & \left\{ \frac{1}{l_{n+1/2}} \left[\dot{X}_{n+1} A_{n+1} + \dot{X}_n A_n + f(l_{n+3/2}, l_{n-1/2}) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{l_{n-1/2}} \left[+\dot{X}_n A_n + \dot{X}_{n-1} A_{n-1} + f(l_{n+1/2}, l_{n-3/2}) \right] \right\} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \sum_i a_{2i} \left[(1 + (-1)^i) \left(R^{(i)} \left(\frac{x}{2} \right)^2 - R^{(i)} \left(\frac{y}{2} \right)^2 \right) \right. \\ & \left. - 4 \sum_{k=1}^{k < \frac{i}{2}} \left(R^{(2k)} \left(\frac{x}{2} \right) R^{(2i-2k)} \left(\frac{x}{2} \right) - R^{(2k)} \left(\frac{y}{2} \right) R^{(2i-2k)} \left(\frac{y}{2} \right) \right) \right] \\ & + 2U_m'' \left(R^2 \left(\frac{x}{2} \right) - R^2 \left(\frac{y}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Annexe E

Généralisation du système sous cisaillement

E.1 Cas des murs rugueux

Nous avons étudié dans ce manuscrit le cisaillement d'une membrane lipidique par des murs plans. Cependant, les substrats biologiques sont souvent rugueux. La rugosité du cartilage bovin peut par exemple atteindre plusieurs dizaines de μm [86]. Nous allons par conséquent considérer des murs rugueux dans ce chapitre, mais nous ne considérerons que le cas des murs imperméables et ne prenons pas en compte les forces tangentielles. Les travaux présentés ici ont été réalisés dans le cadre du stage de L3 d'Anthony Troger que j'ai co-encadré et qui a effectué les calculs et les simulations.

E.1.1 Système étudié et équation d'évolution

Nous considérons une membrane lipidique cisailée par deux murs rugueux imperméables (i.e. $\nu = 0$). La hauteur du mur situé au dessus de la membrane est notée $h_0\eta_+$ et celle du mur situé en dessous est notée $h_0\eta_-$ avec η_{\pm} deux variables sans dimension. Ce

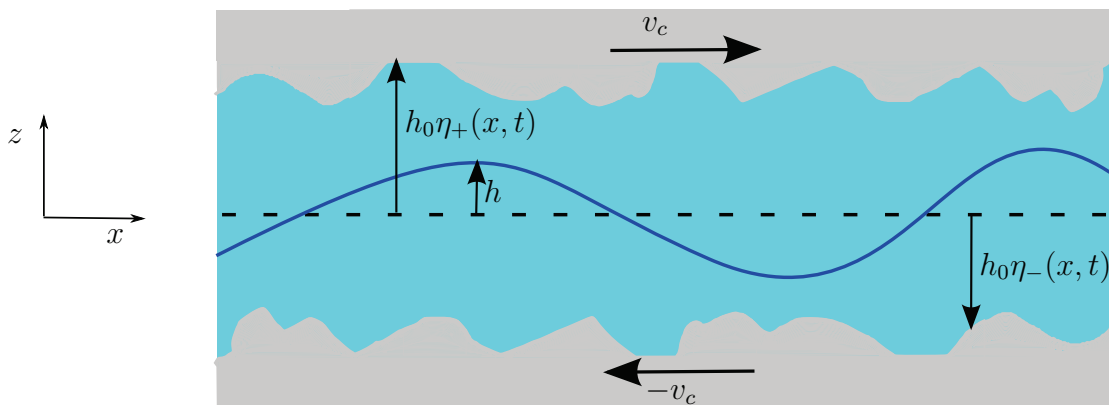


FIGURE E.1 – Schéma du système dans le cas des murs rugueux. La hauteur du mur du dessus est repérée par $h_0\eta_+$ et celle du mur du dessous par $h_0\eta_-$.

ANNEXE E. GÉNÉRALISATION DU SYSTÈME SOUS CISAILLEMENT

sont des fonctions de l'espace et du temps. Pour rester dans le cadre de l'approximation de lubrification nous devons imposer

$$\partial_x(h_0\eta_{\pm}) \ll 1, \quad (\text{E.1})$$

où $x = (\kappa h_0^2/\mathcal{U}_0)^{1/4}X$ et $h_0\eta_{\pm}$ sont l'abscisse et les hauteurs des murs en variables physiques. De même que la pente de la membrane est faible, la pente des rugosités des murs est faible. Cela n'empêche pas d'avoir des variations de h et de η_{\pm} du même ordre que la distance moyenne entre les murs $2h_0$, mais ces variations se feront sur des grandes échelles spatiales. Dans toute cette section, nous considérons qu'il n'y a pas de forces tangentielles à la membrane.

Le système est représenté sur la figure E.1. A partir de l'équation d'évolution de la membrane bidimensionnelle calculée dans l'appendice B.2, nous obtenons l'équation de la membrane unidimensionnelle en prenant les dérivées selon y nulles. Nous trouvons que l'équation d'évolution est

$$\partial_t h = -\partial_x [M_z \partial_x f_z + M_j j] + v_c \partial_x M_{v_c} + \partial_t \left(h_0 \frac{\Sigma \eta}{2} \right). \quad (\text{E.2})$$

Nous rappelons que $\Delta \eta = \eta_+ - \eta_-$ et $\Sigma \eta = \eta_+ + \eta_-$. De plus, les expressions de M_z , M_j et M_{v_c} sont données par les équations (B.48), (B.50) et (B.51). Nous ne prenons pour l'instant pas en compte le potentiel d'interaction de la membrane avec les murs \mathcal{U} . Il n'y a donc que la force de courbure dans les forces normales (selon z dans l'approximation de lubrification).

Nous allons maintenant chercher l'expression du débit j . En différenciant les deux relations (B.21) et (B.20) avec $\nu = 0$ car les murs sont imperméables, nous pouvons dire que

$$\partial_x j = -\partial_t (h_0 \Delta \eta) = v_c \partial_x (h_0 \Sigma \eta). \quad (\text{E.3})$$

Nous en déduisons que

$$j = v_c h_0 \Sigma \eta + f(t) \quad (\text{E.4})$$

où f est une fonction du temps.

En utilisant les conditions aux limites périodiques et en intégrant l'équation (B.44) sur le système nous avons

$$\int_0^{\mathcal{L}} dx \frac{j}{\Delta \eta^3} = \frac{h_0}{12\mu} \int_0^{\mathcal{L}} dx M_j \partial_x f_z. \quad (\text{E.5})$$

En remplaçant j par son expression, nous trouvons que

$$f(t) = \frac{1}{\int_0^{\mathcal{L}} dx 1/\Delta \eta^3} \times \left[-v_c \int_0^{\mathcal{L}} dx \frac{h_0 \Sigma \eta}{\Delta \eta^3} + \frac{h_0}{12\mu} \int_0^{\mathcal{L}} dx M_j \partial_x f_z \right]. \quad (\text{E.6})$$

Nous avons désormais accès à l'expression du débit j qui s'exprime donc sous la forme

$$j = \frac{h_0}{12\mu} \frac{\int_0^{\mathcal{L}} dx M_j \partial_x f_z}{\int_0^{\mathcal{L}} dx 1/\Delta \eta^3} + v_c h_0 \left[\Sigma \eta - \frac{\int_0^{\mathcal{L}} dx \Sigma \eta / \Delta \eta^3}{\int_0^{\mathcal{L}} dx 1/\Delta \eta^3} \right] \quad (\text{E.7})$$

E.1. CAS DES MURS RUGUEUX

En variables normalisées ($X = [\mathcal{U}_0/(\kappa h_0^2)]^{1/4}x$ et $T = [\mathcal{U}_0^{3/2}/(24\mu\kappa^{1/2})]t$) les expressions deviennent

$$\begin{aligned} \partial_T H = & -\frac{1}{8}\partial_X \left\{ \Delta\eta^3 \partial_X F_n \left[1 - \frac{4}{\Delta\eta^2} \left(H - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^2 \right]^3 \right\} \\ & + 2\partial_X \left\{ \frac{J}{\Delta\eta} \left[\frac{4}{3\Delta\eta^2} \left(H - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^3 - \left(H - \frac{\Sigma\eta}{2} \right) \right] \right\} \\ & - \frac{V_c}{4} \partial_X \Delta\eta - V_c \partial_X \left[\frac{1}{\Delta\eta} \left(H - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

pour l'équation d'évolution et

$$\begin{aligned} J = & \frac{9}{4} \frac{\int_0^L dX (1/\Delta\eta^3) \left[\Delta\eta^2 \left(H - \frac{\Sigma\eta}{2} \right) - (4/3) \left(H - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^3 \right] \partial_X F_n}{\int_0^L dX 1/\Delta\eta^3} \\ & + \frac{3V_c}{4} \left(\Sigma\eta - \frac{\int_0^L dX \Sigma\eta/\Delta\eta^3}{\int_0^L dX 1/\Delta\eta^3} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

pour le débit où nous avons développé les différents termes.

E.1.2 Force de friction

De la même manière que pour le cas des murs plans, nous allons regarder la force de friction par unité de longueur f_{fr} sur les murs lorsqu'ils sont en mouvement. Etant dans l'approximation de lubrification, nous considérons que la projection des forces visqueuses sur l'axe vertical z est négligeable et qu'elles sont principalement selon l'axe x . Il reste alors

$$f_{fr} = \frac{1}{\mathcal{L}} \int_0^L dx \left(\mu \partial_z v_{x+}|_{z=h_0\eta_+} - \mu \partial_z v_{x-}|_{z=h_0\eta_-} \right) \quad (\text{E.10})$$

qui donne en reprenant l'expression de la vitesse du fluide donnée dans la section B.2

$$\begin{aligned} f_{fr} = & 2\frac{\mu}{h_0} v_c \frac{1}{\mathcal{L}} \int_0^{\mathcal{L}} dx \frac{2}{\Delta\eta} + \frac{h_0}{\mathcal{L}} \int_0^{\mathcal{L}} dx \frac{\Delta\eta}{4} \left[1 - \frac{4}{\Delta\eta^2} \left(\frac{h}{h_0} - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^2 \right] \partial_x f_n \\ = & f_{v_c} + f_{mem}. \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Cette force est composée d'un terme qui correspond à ce que serait la force sans membrane, f_{v_c} , et un deuxième terme f_{mem} , qui quantifie l'effet de la membrane. Le premier terme à droite correspondant à f_{v_c} , est proportionnel à la valeur moyenne de $1/\Delta\eta$, l'inverse de la distance entre les deux murs. Plus les murs formeront de "goulots" où les murs sont très proches, plus la dissipation visqueuse sera grande et plus cette force sera élevée.

En variables normalisées nous obtenons

$$\begin{aligned} F_{fr} = & 2V_c \frac{1}{L} \int_0^L dX \frac{2}{\Delta\eta} + \frac{24}{L} \int_0^L dX \frac{1}{2} \frac{\Delta\eta}{4} \left[1 - \frac{4}{\Delta\eta^2} \left(H - \frac{\Sigma\eta}{2} \right)^2 \right] \partial_X F_n \\ = & F_{V_c} + F_{mem}, \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

ANNEXE E. GÉNÉRALISATION DU SYSTÈME SOUS CISAILLEMENT

avec $F_{fr} = (24\kappa^{1/4}h_0^{1/2}/\mathcal{U}_0^{5/4})f_{fr}$. Si $\Delta\eta = 2$ et $\Sigma\eta = 0$ nous retrouvons bien l'expression de la force dans le cas des murs plans (voir équation (6.27))

E.1.3 Premiers résultats

Nous allons maintenant présenter les premiers résultats des simulations réalisées par Anthony Troger durant son stage de L3. Des comportements inattendus semblent ressortir. Cependant, ces résultats préliminaires demandent à être confirmés par une étude plus approfondie.

Pour l'étude numérique, nous avons choisi des formes simples pour les murs

$$\eta_+ = 1 + A_\eta \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda_\eta} (X - V_c T) \right], \quad (\text{E.13})$$

$$\eta_- = -1 + A_\eta \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda_\eta} (X + V_c T) \right]. \quad (\text{E.14})$$

Les murs sont une sinusoïde d'amplitude A_η et de longueur d'onde λ_η qui seront deux paramètres que nous pouvons faire varier en plus de la vitesse de cisaillement V_c . En ce qui concerne les forces normales à la membrane F_n , nous ne considérons pas d'attraction de la part des murs. Nous n'avons que la force de rigidité $F_n = -\partial_X^4 H$ qui va tendre à garder la membrane plane.

Pour les simulations, nous commençons avec des conditions initiales aléatoires et travaillons avec des conditions aux limites périodiques. Ce que nous observons de manière générale, est que les deux contributions, F_{mem} et F_{V_c} , à la force de friction totale F_{fr} sont périodiques avec le temps comme nous le voyons en (a) de la figure E.2. De plus, les deux contributions semblent être en opposition de phase pour les faibles vitesses. Un déphasage se met en place pour les grands V_c , le temps de réponse de la membrane devenant trop long devant le temps typique de déplacement des murs. La membrane ne peut plus suivre les mouvements des murs. Enfin, pour les grandes vitesses, nous avons un régime de transition avant d'atteindre le régime permanent où les contributions à la friction sont sinusoïdales.

Nous pouvons calculer analytiquement F_{V_c}

$$F_{V_c} = 2V_c \frac{1}{L} \int_0^L dX \frac{2}{\Delta\eta} = 2V_c \left[\frac{1}{1 - (A_\eta \sin((2\pi/\lambda)V_c T))^2} \right]^{1/2}. \quad (\text{E.15})$$

Le minimum de F_{V_c} vaut $2V_c$, la valeur de la force de friction dans le cas de murs plans et sans membrane. En l'absence de membrane, la rugosité augmente donc les frottements. Nous pouvons ensuite définir la valeur moyenne des différentes contributions

$$\langle F \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dT F \quad (\text{E.16})$$

où T est une période. De même nous définissons l'écart-type

$$E(F) = (\langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2)^{1/2}. \quad (\text{E.17})$$

E.2. EMPILEMENT DE N MEMBRANES CISAILLÉES PAR DEUX MURS PLANS IMPERMÉABLES

La moyenne et l'écart-type de F_{V_c} seront proportionnels à V_c pour les η_{\pm} choisis. Nous avons tracé la valeur moyenne et l'écart-type pour F_{mem} sur la figure E.2 en (b). La première remarque est que la valeur moyenne de la contribution de la membrane est toujours négative. La membrane aurait donc pour effet de diminuer la friction par rapport au cas où elle est absente. Cependant, sa valeur relative par rapport à la friction du système sans membrane diminue avec la vitesse de cisaillement comme nous le voyons en (c). De plus, l'écart-type de F_{mem} est supérieur que celui de la force du système sans membrane (représenté par la droite bleue) pour les faibles V_c , et comme les deux contributions sont en oppositions de phase, nous pouvons obtenir une force de friction totale inférieure à $2V_c$, la force dans le cas des murs plans sans membrane. Nous l'observons pour $V_c = 0, 1$ comme le montre la figure E.2 en (a).

En ce qui concerne la dynamique de la membrane, nous observons des ondes stationnaires. La membrane vibre autour de $H = 0$ avec des noeuds et des ventres de vibrations. Nous le voyons bien sur la figure E.2 en (d). Ceci n'est plus tout à fait vrai pour les grandes vitesses de cisaillement V_c , la membrane n'arrive plus à suivre le mouvement des murs, elle a un temps de réponse trop long. Ce phénomène est sans doute responsable du déphasage des deux contributions à la force de friction.

Pour les deux autres paramètres A_{η} et λ_{η} nous n'avons pas de conclusions. Nous semblons avoir une augmentation de la friction si l'amplitude A_{η} de la rugosité augmente mais ce résultat demande d'être confirmé.

E.2 Empilement de N membranes cisailées par deux murs plans imperméables

Nous n'avons jusqu'à maintenant étudié que le cas où le système est constitué d'une seule membrane. Or, dans les systèmes biologiques nous observons souvent des empilements de membranes [37, 38]. Il est donc naturel de considérer un empilement de membranes comme suite de nos travaux. Les empilements de membranes ont déjà été étudiées théoriquement par R.R. Netz et R. Lipowsky [71] qui se sont intéressés à la déliaison de ceux-ci. L'étude des phases lamellaires lyotropes, dont les empilements de membranes lipidiques font partie, montre qu'elles peuvent exister sous plusieurs phases selon la concentration des lipides et le cisaillement [84]. Ils trouvent notamment qu'un empilement de membranes séparées d'environ 10 nm est stable au-dessus d'un taux de cisaillement de 4.10^3 s^{-1} . Ceci correspond à une vitesse de cisaillement v_c de $4.10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$ pour un empilement de 10 membranes séparées de 10 nm. Nous considérons que nous sommes dans la zone où les empilements de membrane sont stables, ce qui est cohérent avec l'ordre de grandeur de la vitesse typique u_0 (voir équation (6.1)).

E.2.1 Système étudié

Nous considérons ici un empilement de N membranes cisailé par deux murs plans imperméables ($\nu = 0$), le système est représenté sur la figure E.3. Toutes les membranes sont prises identiques à celle considérée jusqu'ici, c'est-à-dire une membrane imperméable avec une rigidité de courbure κ et sur laquelle le fluide ne glisse pas. La hauteur de la

ANNEXE E. GÉNÉRALISATION DU SYSTÈME SOUS CISAILLEMENT

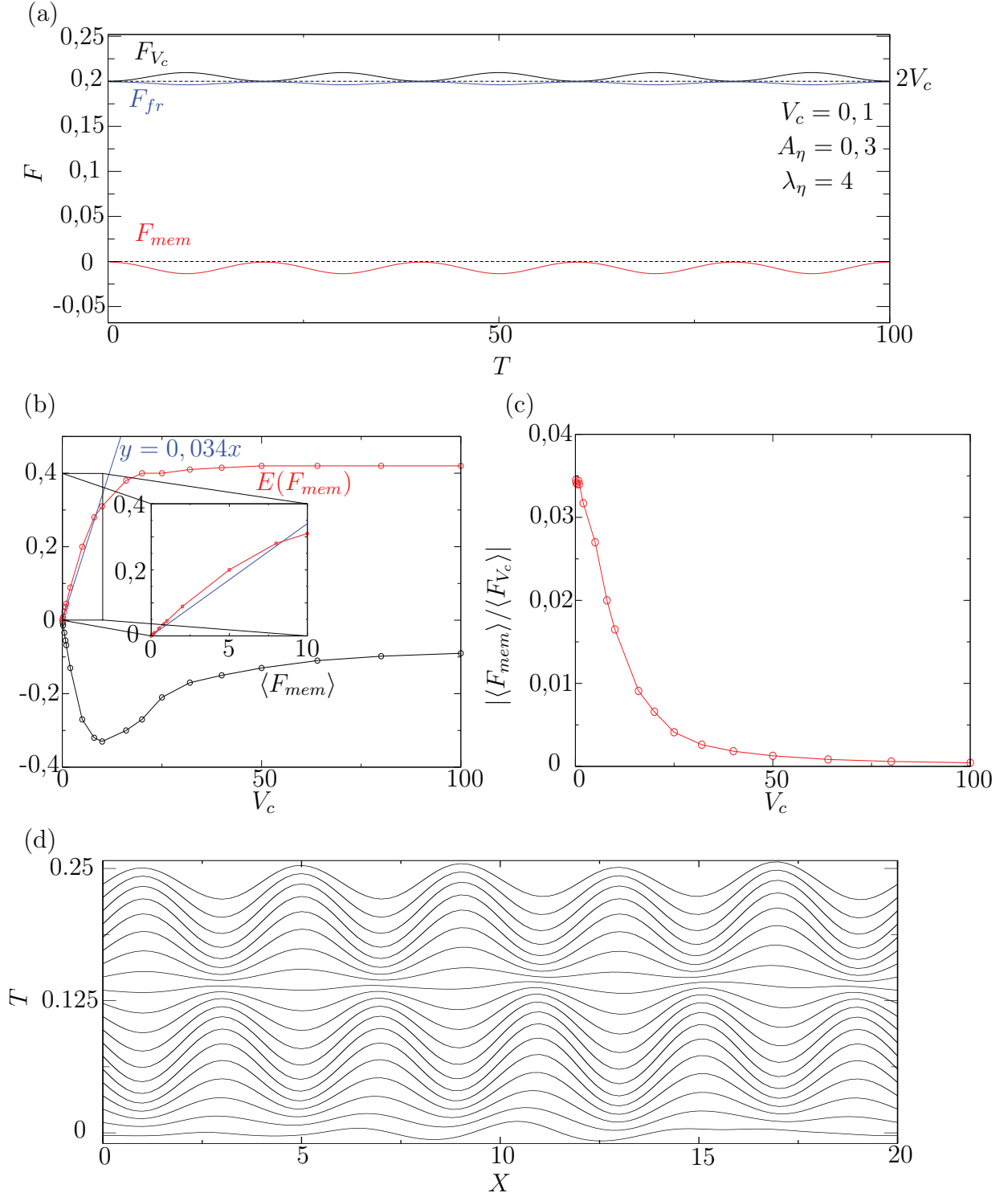


FIGURE E.2 – (a) Force de friction en fonction du temps pour $V_c = 0, 1$, $A_\eta = 0, 3$ et $\lambda_\eta = 4$. En noir, la partie F_{V_c} . En rouge, la contribution de la membrane et en bleu, la force totale. (b) Moyenne et écart-type de F_{mem} en fonction de la vitesse de cisaillement V_c avec $A_\eta = 0, 3$ et $\lambda_\eta = 4$. La droite bleue représente l'écart-type dans le cas où il n'y a pas de membrane, il vaut alors $0,034V_c$. (c) Rapport entre la contribution moyenne $\langle F_{mem} \rangle$ de la membrane et $\langle F_{V_c} \rangle$. (d) Différents profils de la membrane translatés avec le temps pour $V_c = 8$.

E.2. EMPILEMENT DE N MEMBRANES CISAILLÉES PAR DEUX MURS PLANS IMPERMÉABLES

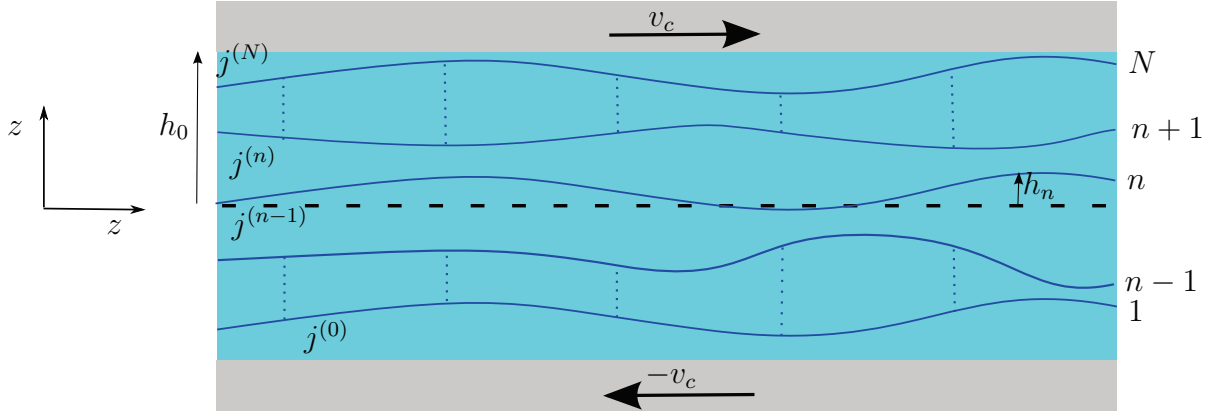


FIGURE E.3 – Schéma du système avec un empilement de N membranes.

n -ième membrane est noté h_n . Nous pouvons également définir le débit du fluide $j^{(n)}$ entre les membranes n et $n + 1$

$$j^{(n)} = \int_{h_n}^{h_{n+1}} dz v_x^{(n)}, \quad (\text{E.18})$$

où $v_x^{(n)}$ est la vitesse du fluide selon x entre les membranes n et $n + 1$. Nous posons $j^{(0)}$ le débit entre le mur inférieur et la membrane numéro 1 et $j^{(N)}$ le débit entre la membrane N et le mur supérieur (de même pour $v_x^{(0)}$ et $v_x^{(N)}$). Le débit total est simplement la somme de tous les débits

$$j = \sum_{n=0}^N j^{(n)}. \quad (\text{E.19})$$

E.2.2 Equation d'évolution

Equation d'évolution sur h_n

Cherchons maintenant l'équation d'évolution du système. En utilisant l'incompressibilité du fluide nous pouvons dire, en suivant les mêmes étapes qu'au début de la sous-section 2.2.2, que

$$\partial_t h_n = \partial_x \left(\sum_{k=n}^N j^{(k)} \right) = -\partial_x \left(\sum_{k=0}^{n-1} j^{(k)} \right) \quad (\text{E.20})$$

où nous rappelons que $J^{(k)}$ est le débit de fluide entre la membrane k et $k + 1$ et nous considérons que le mur inférieur joue le rôle de la membrane 0 et le mur supérieur de la membrane N . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \partial_t h_n &= \frac{1}{2} \partial_x \left(-\sum_{k=0}^{n-1} j^{(k)} + \sum_{k=n}^N j^{(k)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \partial_x \left[-\int_{-h_0}^{h_1} dz v_x^{(0)} - \sum_{k=1}^{n-1} \int_{h_k}^{h_{k+1}} dz v_x^{(k)} + \sum_{k=n}^{N-1} \int_{h_k}^{h_{k+1}} dz v_x^{(k)} + \int_{h_N}^{h_0} dz v_x^{(N)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

ANNEXE E. GÉNÉRALISATION DU SYSTÈME SOUS CISAILLEMENT

Dans l'approximation de lubrification, la vitesse du fluide $v_x^{(k)}$ peut s'écrire sous la forme

$$v_x^{(k)} = \frac{z^2}{2\mu} \partial_x p^{(k)} + z a^{(k)} + b^{(k)} \quad (\text{E.22})$$

où $p^{(k)}$ est la pression entre la membrane k et $k+1$ et $a^{(k)}$ et $b^{(k)}$ deux constantes à déterminer. En remplaçant les $v_x^{(k)}$ par leur valeur dans l'équation (E.21) nous trouvons que

$$\begin{aligned} \partial_t h_n = & \frac{1}{2} \partial_x \left[\frac{h_0^3}{6\mu} (\partial_x p^{(N)} - \partial_x p^{(0)}) + \frac{h_0^2}{2} (a^{(N)} + a^{(0)}) + h_0 (b^{(N)} - b^{(0)}) \right. \\ & - \frac{h_n^3}{6\mu} \partial_x \Sigma^{(n)} p - \frac{h_n^2}{2} \Sigma^{(n)} a - h_n \Sigma^{(n)} b + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{h_k^3}{6\mu} \partial_x \Delta^{(k)} p + \frac{h_k^2}{2} \Delta^{(k)} a + h_k \Delta^{(k)} b \right) \\ & \left. - \sum_{k=n+1}^N \left(\frac{h_k^3}{6\mu} \partial_x \Delta^{(k)} p + \frac{h_k^2}{2} \Delta^{(k)} a + h_k \Delta^{(k)} b \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

où pour une grandeur Y donnée nous avons $\Delta^{(k)} Y = Y^{(k)} - Y^{(k-1)}$ et $\Sigma^{(k)} Y = Y^{(k)} + Y^{(k-1)}$. Il reste désormais à trouver les différentes inconnues. Pour alléger l'écriture nous allons utiliserons par la suite la fonction *sign* définie par

$$\begin{aligned} \text{sign}(x) &= -1 \text{ si } x < 0 \\ \text{sign}(x) &= 1 \text{ si } x > 0 \\ \text{sign}(x) &= 0 \text{ si } x = 0 \end{aligned}$$

Nous reprenons des conditions aux limites semblables à celles des systèmes étudiés précédemment, c'est-à-dire non glissement sur les murs et la membrane et continuité du tenseur des contraintes (nous considérons les forces tangentielles à la membrane nulles). Cela donne le système d'équations suivant

$$v_x^{(N)}|_{z=h_0} = v_c, \quad (\text{E.24})$$

$$v_x^{(0)}|_{z=-h_0} = -v_c, \quad (\text{E.25})$$

$$v_x^{(k-1)}|_{z=h_k} = v_x^{(k)}|_{z=h_k}, \quad (\text{E.26})$$

$$p^{(k)} - p^{(k-1)} = f_n^{(k)}, \quad (\text{E.27})$$

$$\partial_z v_x^{(k-1)}|_{z=h_k} - \partial_z v_x^{(k)}|_{z=h_k} = 0, \quad (\text{E.28})$$

$$j = \sum_{k=0}^N j^{(k)}. \quad (\text{E.29})$$

En remplaçant les $v_x^{(k)}$ par leurs expressions ((E.22)) et en réarrangeant le système cela

E.2. EMPILEMENT DE N MEMBRANES CISAILLÉES PAR DEUX MURS PLANS IMPERMÉABLES

donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h_0^2}{2\mu} \partial_x (p^{(N)} + p^{(0)}) + h_0 (a^{(N)} - a^{(0)}) + b^{(N)} + b^{(0)} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{E.30})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h_0^2}{2\mu} \partial_x (p^{(N)} - p^{(0)}) + h_0 (a^{(N)} + a^{(0)}) + b^{(N)} - b^{(0)} = 2v_c, \end{array} \right. \quad (\text{E.31})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h_k^2}{2\mu} \partial_x \Delta^{(k)} p + h_k \Delta^{(k)} a + \Delta^{(k)} b = 0, \end{array} \right. \quad (\text{E.32})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^{(k)} p = f_n^{(k)}, \end{array} \right. \quad (\text{E.33})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h_k}{\mu} \partial_x \Delta^{(k)} p + \Delta^{(k)} a = 0, \end{array} \right. \quad (\text{E.34})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} j = \sum_{k=0}^N j^{(k)} = \int_{-h_0}^{h_1} dz v_x^{(0)} + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{h_k}^{h_{k+1}} dz v_x^{(k)} + \int_{h_N}^{h_0} dz v_x^{(N)}, \end{array} \right. \quad (\text{E.35})$$

Nous en déduisons directement les expressions des $\Delta^{(k)} Y$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^{(k)} p = f_n^{(k)}, \end{array} \right. \quad (\text{E.36})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^{(k)} a = -\frac{h_k}{\mu} \partial_x f_n^{(k)}, \end{array} \right. \quad (\text{E.37})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^{(k)} b = \frac{h_k^2}{2\mu} \partial_x f_n^{(k)}. \end{array} \right. \quad (\text{E.38})$$

Il est de plus aisé de vérifier que

$$Y^{(N)} - Y^{(0)} = \sum_{k=1}^N \Delta^{(k)} Y \quad (\text{E.39})$$

et que

$$Y^{(N)} + Y^{(0)} = \sum_{k=1}^N \text{sign}(k - n) \Delta^{(k)} Y + \Sigma^{(n)} Y. \quad (\text{E.40})$$

Les dernières inconnues à trouver sont donc les $\Sigma^{(n)} Y$. Le système d'équations se réarrange

ANNEXE E. GÉNÉRALISATION DU SYSTÈME SOUS CISAILLEMENT

de la manière suivante

$$\Delta^{(k)}p = f_n^{(k)}, \quad (\text{E.41})$$

$$\Delta^{(k)}a = -\frac{h_k}{\mu} \partial_x f_n^{(k)}, \quad (\text{E.42})$$

$$\Delta^{(k)}b = \frac{h_k^2}{2\mu} \partial_x f_n^{(k)}, \quad (\text{E.43})$$

$$\frac{h_0^2}{2\mu} \partial_x \left(\sum_{k=1}^N \text{sign}(k-n) \Delta^{(k)}p + \Sigma^{(n)}p \right) + h_0 \sum_{k=1}^N \Delta^{(k)}a + \sum_{k=1}^N \text{sign}(k-n) \Delta^{(k)}b + \Sigma^{(n)}b = 0, \quad (\text{E.44})$$

$$\frac{h_0^2}{2\mu} \partial_x \left(\sum_{k=1}^N \Delta^{(k)}p \right) + h_0 \left(\sum_{k=1}^N \text{sign}(k-n) \Delta^{(k)}a + \Sigma^{(n)}a \right) + \sum_{k=1}^N \Delta^{(k)}b = 2v_c, \quad (\text{E.45})$$

$$\begin{aligned} j = & \frac{h_0^3}{6\mu} \partial_x \left(\sum_{k=1}^N \text{sign}(k-n) \Delta^{(k)}p + \Sigma^{(n)}p \right) + \frac{h_0^2}{2} \sum_{k=1}^N \Delta^{(k)}a \\ & + h_0 \sum_{k=1}^N \text{sign}(k-n) \Delta^{(k)}b + h_0 \Sigma^{(n)}b \\ & + \sum_{k=1}^N \left[-\frac{h_k^3}{6\mu} \partial_x \Delta^{(k)}p - \frac{h_k^2}{2} \Delta^{(k)}a - h_k \Delta^{(k)}b \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.46})$$

L'équation (E.45) nous donne

$$\Sigma^{(n)}a = \frac{2v_c}{h_0} - \frac{h_0}{2\mu} \sum_{k=1}^N \left[\left(1 + \frac{h_k^2}{h_0^2} \right) \partial_x f_n^{(k)} \right] + \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^N \text{sign}(k-n) h_k \partial_x f_n^{(k)}. \quad (\text{E.47})$$

Ensuite nous réalisons (E.46)- h_0 (E.44) qui donne

$$\partial_x \Sigma^{(n)}p = -\frac{3\mu}{h_0^3} j + \sum_{k=1}^N \left[\left(\frac{3}{2} \frac{h_k}{h_0} - \frac{1}{2} \frac{h_k^3}{h_0^3} - \text{sign}(k-n) \right) \partial_x f_n^{(k)} \right]. \quad (\text{E.48})$$

Et enfin nous pouvons calculer

$$\Sigma^{(n)}b = \frac{2}{3h_0} j + \frac{1}{4h_0\mu} \sum_{k=1}^N \left[(h_k^3 + h_0^2 h_k - 2\text{sign}(k-n) h_0 h_k^2) \partial_x f_n^{(k)} \right]. \quad (\text{E.49})$$

Nous avons désormais tous les éléments pour retrouver l'équation d'évolution de la mem-

E.2. EMPILEMENT DE N MEMBRANES CISAILLÉES PAR DEUX MURS PLANS IMPERMÉABLES

brane n en réinjectant dans l'équation (E.23)

$$\begin{aligned} \partial_t h_n = & -\frac{h_0^3}{24\mu} \partial_x \left\{ \sum_{k=1}^N \partial_x f_n^{(k)} \left[\left(1 - \frac{h_k h_n}{h_0^2}\right) \left(\left(1 - \frac{h_k h_n}{h_0^2}\right)^2 - 3 \left(\frac{h_n}{h_0} - \frac{h_k}{h_0}\right)^2 \right) \right] \right\} \\ & + \frac{3}{4} \partial_x \left[j \frac{h_n}{h_0} \left(\frac{h_n^2}{3h_0^2} - 1 \right) \right] - v_c h_n \partial_x h_n \\ & + \frac{h_0^3}{12\mu} \partial_x \left[\sum_{k=1}^N \partial_x f_n^{(k)} \left(\frac{h_k}{h_0} - \frac{h_n}{h_0} \right)^3 \text{sign}(n-k) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.50})$$

En variables normalisées, l'équation devient

$$\begin{aligned} \partial_T H_n = & -\partial_X \left\{ \sum_{k=1}^N \partial_X F_n^{(k)} \left[(1 - H_k H_n) \left((1 - H_k H_n)^2 - 3(H_n - H_k)^2 \right) \right] \right\} \\ & + \partial_X \left[J H_n \left(\frac{H_n^2}{3} - 1 \right) \right] - V_c H_n \partial_X H_n \\ & + 2\partial_X \left[\sum_{k=1}^N \partial_X F_n^{(k)} (H_k - H_n)^3 \text{sign}(n-k) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.51})$$

Expression de J

Nous allons maintenant chercher l'expression du débit j . Nous montrons aisément à partir de l'équation (E.20) que

$$\partial_x j = 0, \quad (\text{E.52})$$

donc j est une constante de l'espace. Pour obtenir cette constante nous partons de la relation (E.48). En intégrant sur la taille du système \mathcal{L} et en utilisant les conditions aux limites périodiques nous obtenons directement l'expression du débit

$$j = \frac{h_0^3}{2\mu\mathcal{L}} \int_0^{\mathcal{L}} dx \sum_{k=1}^N \frac{h_k}{h_0} \left(1 - \frac{h_k^2}{3h_0^2} \right) \partial_x f_n^{(k)}, \quad (\text{E.53})$$

qui devient en variables normalisées

$$J = \frac{9}{L} \int_0^L dX \sum_{k=1}^N H_k \left(1 - \frac{H_k^2}{3} \right) \partial_X F_n^{(k)}. \quad (\text{E.54})$$

Index des notations

grandeurs physiques	variables physiques	variables normalisées
courbure (moyennne)	c	/
courbure spontanée	c_0	/
courbure gaussienne	c_G	/
tenseur de courbure	(c_{ij})	/
courbure moyenne	c_m	/
courbure du contour	c_∂	/
coefficient de diffusion	\mathcal{D}	/
énergie d'activation du mûrissement	/	\hat{E}_0
barrière d'énergie d'un kink	\mathcal{E}_b	$E_b = (\mathcal{U}_0^{-3/4} \kappa^{-1/4} h_0^{-1/2}) \mathcal{E}_b$
énergie de compression extension	$\mathcal{E}_{comp-ext}$	/
énergie de la membrane	\mathcal{E}_{mem}	$E_{mem} = (\mathcal{U}_0^{-3/4} \kappa^{-1/4} h_0^{-1/2}) \mathcal{E}_{mem}$
énergie potentielle de la membrane	\mathcal{E}_p	$E_p = (\mathcal{U}_0^{-3/4} \kappa^{-1/4} h_0^{-1/2}) \mathcal{E}_p$
vecteurs unitaires cartésiens	$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	/
énergie de courbure	\mathcal{E}_κ	$E_\kappa = (\mathcal{U}_0^{-3/4} \kappa^{-1/4} h_0^{-1/2}) \mathcal{E}_\kappa$
énergie de tension	\mathcal{E}_ς	$E_\varsigma = (\mathcal{U}_0^{-3/4} \kappa^{-1/4} h_0^{-1/2}) \mathcal{E}_\varsigma$
densité d'énergie d'un état périodique	/	e_λ
force de frottement sur les murs	f_{fr}	$F_{fr} = [24\kappa^{1/4} h_0^{1/2} / \mathcal{U}_0^{5/4}] f_{fr}$

ANNEXE E. GÉNÉRALISATION DU SYSTÈME SOUS CISAILLEMENT

force interne par longueur normale	\mathbf{f}_n	$F_n = (h_0/\mathcal{U}_0)f_n$
force interne par longueur tangentielle	\mathbf{f}_t	$F_t = [24\kappa^{1/4}h_0^{1/2}/\mathcal{U}_0^{5/4}]f_t$
force de courbure	\mathbf{f}_κ	/
déterminant tenseur de la métrique	g	/
tenseur de la métrique	(g_{ij})	/
inverse tenseur de la métrique	(g^{ij})	/
hauteur de la membrane	h	$H = h/h_0$
hauteur moyenne de la membrane	\bar{h}	$\bar{H} = \bar{h}/h_0$
hauteur moyenne du mur supérieur	h_0	1
hauteur de la solution stationnaire avec un kink	h^0	$H^0 = h^0/h_0$
hauteur des minimums du potentiel	$\pm h_m$	$H_m = h_m/h_0$
hauteur de la membrane à mi-distance entre le kink n et $n + 1$	$h_{n+1/2}$	$H_{n+1/2} = h_{n+1/2}/h_0$
hauteur des états stationnaires périodiques	h_λ	$H_\lambda = h_\lambda/h_0$
débit de fluide	$\mathbf{j} = j_x \mathbf{e}_x$	$\mathbf{J} = [(18\mu\kappa^{1/4})/(h_0^{3/2}\mathcal{U}_0^{5/4})]\mathbf{j}$
constante de Boltzmann	k_B	/
taille typique domaine d'adhésion	ℓ	$l = [\mathcal{U}_0/(\kappa h_0^2)]^{1/4}\ell$
taille du système	\mathcal{L}	$L = [\mathcal{U}_0/(\kappa h_0^2)]^{1/4}\mathcal{L}$
distance entre le kink n et $n + 1$	$\ell_{n+1/2}$	$l_{n+1/2} = [\mathcal{U}_0/(\kappa h_0^2)]^{1/4}\ell_{n+1/2}$
critère de stabilité	/	\mathcal{L}_λ
terme de mobilité	/	$M(H)$
vecteur normal	\mathbf{n}	/
pression du fluide	p	$P = (h_0/\mathcal{U}_0)p$

E.2. EMPILEMENT DE N MEMBRANES CISAILLÉES PAR DEUX MURS PLANS IMPERMÉABLES

pression extérieure	p_{ext}	/
vecteur d'onde	/	q
vecteur position	\mathbf{r}	/
queue des kinks	/	$R(X)$
interaction entre kinks	/	\tilde{R}
abscisse curviligne	s	/
coordonnées internes	s_1, s_2	/
temps	t	$\nu \rightarrow 0 : T = [\mathcal{U}_0^{3/2}/(24\mu\kappa^{1/2})]t$ $\nu \rightarrow \infty : T = [\nu\mathcal{U}_0/(2h_0^2)]t$
temps typique	t_0	/
température	T_{emp}	/
vecteur tangentiel (membrane 1D)	\mathbf{t}	/
vecteurs tangentiels (membrane 2D)	$\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$	/
potentiel	$\mathcal{U}(h)$	$U(H) = \mathcal{U}(h)/\mathcal{U}_0$
potentiel typique	\mathcal{U}_0	/
dérivée seconde du potentiel aux minimums	\mathcal{U}_m''	$U_m'' = (h_0^2/\mathcal{U}_0)\mathcal{U}_m''$
vitesse typique du fluide	u_0	/
vitesse de cisaillement	$\mathbf{v}_c = v_c \mathbf{e}_x$	$\mathbf{V}_c = [(24\mu\kappa^{1/4})/(h_0^{1/2}\mathcal{U}_0^{5/4})]\mathbf{v}_c$
vitesse du fluide tangentielle (\mathbf{v}_{2D} pour la membrane 2D)	$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x$	$V_x = [(24\mu\kappa^{1/4})/(h_0^{1/2}\mathcal{U}_0^{5/4})]v_x$
vitesse du fluide normale	$v_z \mathbf{e}_z$	$V_z = [(24\mu\kappa^{1/2})/(h_0\mathcal{U}_0^{3/2})]v_z$
potentiel de Van der Waals	V_{dW}	/
coordonnées cartésiennes tangentielles	x, y	$(X, Y) = [\mathcal{U}_0/(\kappa h_0^2)]^{1/4}(x, y)$
variable spatiale lente	\tilde{x}	$\tilde{X} = [\mathcal{U}_0/(\kappa h_0^2)]^{1/4}\tilde{x}$

ANNEXE E. GÉNÉRALISATION DU SYSTÈME SOUS CISAILLEMENT

position n -ième kink	x_n	$X_n = [\mathcal{U}_0/(\kappa h_0^2)]^{1/4} x_n$
vitesse du n -ième kink	\dot{x}_n	$\dot{X}_n = [(24\mu\kappa^{1/4})/(h_0^{1/2}\mathcal{U}_0^{5/4})]\dot{x}_n$
milieu du plateau entre le kink n et $n + 1$	$x_{n+1/2}$	$X_{n+1/2} = [\mathcal{U}_0/(\kappa h_0^2)]^{1/4} x_n$
coordonnée cartésienne normale	z	$Z = z/h_0$
déphasage de la queue des kinks	/	α
paramètre de l'asymétrie du potentiel	/	β
module de compressibilité	χ	/
distance entre les 2 minimums du potentiel	Δh	$\Delta H = \Delta h/h_0$
petit paramètre	/	ϵ
mobilité des kinks	η	/
hauteur du mur supérieur	$h_0\eta_+$	η_+
hauteur du mur inférieur	$h_0\eta_-$	η_-
rigidité de courbure	κ	/
module de courbure gaussienne	κ_G	/
longueur d'onde	/	λ
longueur d'onde moyenne	/	$\bar{\lambda}$
longueur de Debye	λ_D	/
longueur d'onde la plus instable	/	λ_m
viscosité du fluide	μ	/
viscosité effective	μ_{eff}	/
perméabilité des murs	ν	$\nu_n = [(12\mu\kappa^{1/2})/(h_0^2\mathcal{U}_0^{1/2})]\nu$
taux d'accroissement	ω	/
vecteur d'onde de la queue des kinks	/	Ω

E.2. EMPILEMENT DE N MEMBRANES CISAILLÉES PAR DEUX MURS PLANS IMPERMÉABLES

phase de la membrane	$/$	ϕ
masse volumique du fluide	ρ	$/$
tension de surface	ς	$\sigma = [h_0/(\kappa^{1/2}\mathcal{U}_0^{1/2})]\varsigma$
tension de surface critique	ς_c	$\sigma_c = [h_0/(\kappa^{1/2}\mathcal{U}_0^{1/2})]\varsigma_c$
tenseur des contraintes	$\bar{\bar{\tau}}$	$/$

Bibliographie

- [1] Asfaw, M., B. Rozycki, R. Lipowsky et T.R. Weigl, “Membrane adhesion via competing receptor/ligand bonds”, *Europhysics letters*, **76**, 703 (2006).
- [2] Auth, T. et G. Gompper, “Fluctuation pressure of biomembranes in planar confinement”, *Physical Review E*, **88**, 010701 (2013).
- [3] Barabasi, A., L. et H.E. Stanley, *Fractal concepts in surface growth*, Cambridge (1995).
- [4] Barakat, F., K. Martens et O. Pierre-Louis, “Nonlinear wavelength selection in surface faceting under electromigration”, *Physical Review Letters*, **109**, 056101 (2012).
- [5] Bena, I., C. Misbah et A. Valance, “Nonlinear evolution of a terrace edge during step-flow growth”, *Physical Review B*, **47**, 7408 (1993).
- [6] Benilov, M., S., “Theory of structures in near-electrode plasma regions”, *Physical Review A*, **45**, 5901 (1992).
- [7] Bihr, T., U. Seifert et A.S. Smith, “Nucleation of ligand-receptor domains in membrane adhesion”, *Physical Review Letters*, **109**, 258101 (2012).
- [8] Boal, D., *Dynamics of the cell*, Cambridge (2002).
- [9] Botan, A., L. Joly, N. Fillot et C. Loison, “Mixed mechanism of lubrication by lipid bilayer stacks”, *Langmuir*, (2015).
- [10] Brenner, B., “The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface”, *Chemical Engineering Science*, **16**, 242 (1961).
- [11] Brugués, J., B. Maugis, J. Casademunt, P. Nassoy, F. Amblard et P. Sens, “Dynamical organization of the cytoskeletal cortex probed by micropipette aspiration”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **107**, 15415 (2010).
- [12] Bruinsma, R., A. Behrisch et E. Sackmann, “Adhesive switching of membranes : experiment and theory”, *Physical Review E*, **61**, 4253 (2000).
- [13] Cahn, J., W. et J.E. Hilliard, “Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy”, *Journal of Chemical Physics*, **28**, 258 (1958).
- [14] Cahn, J., W., “On spinodal decomposition”, *Acta Metallurgica*, **9**, 795 (1961).
- [15] Canham, P., B., “The minimum energy of bending as possible explanation of the biconcave shape of the human red blood cell”, *Journal of Theoretical Biology*, **26**, 61 (1970).

- [16] Cantat, I., *Dynamique de vésicules en adhésion*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble I (1999).
- [17] Cevc, G., “How membrane chain-melting phase-transition temperature is affected by the lipid chain asymmetry and degree of unsaturation : an effective chain-length model”, *Biochemistry*, **30**, 7186 (1991).
- [18] Corneci, M., C., F. Dekkiche, A.M. Trunfio-Sfarghiu, M.H. Meurisse, Y. Berthier et J.P. Rieu, “Tribology properties of fluid phases phospholipid bilayers”, *Tribology International*, **44**, 1959 (2011).
- [19] Coulet, P., C. Elphick et D. Repaux, “Nature of spatial chaos”, *Physical Review Letters*, **56**, 431 (1987).
- [20] Cross, M. et H. Greenside, *Pattern formation and dynamics in nonequilibrium systems*, Cambridge, p197 (2009).
- [21] Das, C., M.G. Noro et P.D. Olmsted, “Simulation studies of stratum corneum lipid mixtures”, *Biophysical Journal*, **97**, 1941 (2009).
- [22] Delanoë-Ayari, H., P. Lenz, J. Brevier, M. Weidenhaupt, M. Vallade, D. Gulino, J.F. Joanny et D. Riveline, “Periodic adhesive fingers between contacting cells”, *Physical Review Letters*, **93**, 108102 (2004).
- [23] Divet, F., *Fluctuations d’une membrane en interaction avec un champ diffusif*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble I (2001).
- [24] Döbereiner, H., G., E. Evans, M. Kraus, U. Seifert et M. Wortis, “Mapping vesicle shapes into the phase diagram : a comparison of experiment and theory”, *Physical Review E*, **55**, 4458 (1997).
- [25] Dustin, M., L. et J.A. Cooper, “The immunological synapse and the actin cytoskeleton : molecular hardware for T cell signaling”, *Nature Immunology*, **1**, 23 (2000).
- [26] Ei, S.-I. et T. Ohta, “Equation of motion for interacting pulses”, *Physical Review E*, **50**, 4672 (1994).
- [27] Emmott, C., L. et A.J. Bray, “Coarsening dynamics of a one-dimensional driven Cahn-Hilliard system”, *Physical Review E*, **54**, 4568 (1996).
- [28] Evans, E. et W. Rawicz, “Entropy-driven tension and bending elasticity in condensed-fluid membranes”, *Physical Review letters*, **64**, 2094 (1990).
- [29] Farago, O., “Mechanical surface tension governs membrane thermal fluctuations”, *Physical Review E*, **84**, 051914 (2011).
- [30] Fournier, J.-B. et C. Barbetta, “Direct calculation from the stress tensor of the lateral surface tension of fluctuating fluid membranes”, *Physical Review Letters*, **100**, 078103 (2008).
- [31] Golovin, A., A., A.A. Nepomnyashchy, S.H. Davis et M.A. Zaks, “Convective Cahn-Hilliard models : from coarsening to roughening”, *Physical Review Letters*, **86**, 1550 (2001).
- [32] Gov, N., A.G. Zilman et S. Safran, “Hydrodynamics of confined membranes”, *Physical review E*, **70**, 011104 (2004).

BIBLIOGRAPHIE

- [33] Hausser, F. et A. Voigt, “Geometric Ginzburg-Landau theory for faceted crystals in one dimension : from coarsening to chaos through a driving force”, *Physical Review E*, **79**, 011115 (2009).
- [34] Helfrich, W., “Elastic properties of elastic bilayers : theory and possible experiments”, *Z. Naturforsch*, **28**, 693 (1973).
- [35] Helfrich, W., “Steric interaction of fluid membranes in multilayer systems”, *Z. Naturforsch*, **33**, 305 (1978)
- [36] Hemmerle, A., L. Malaquin, T. Charitat, S. Lecuyer, G. Fragneto et J. Daillant, “Controlling interactions in supported bilayers from weak electrostatic repulsion to high osmotic pressure”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **109**, 19938 (2012).
- [37] Hills, B., A., “Surface-active phospholipid : a Pandora’s box of clinical applications. Part I. The lung and air spaces”, *Internal Medicine Journal*, **32**, 170 (2002).
- [38] Hills, B., A., “Surface-active phospholipid : a Pandora’s box of clinical applications. Part II. Barrier and lubricating properties”, *Internal Medicine Journal*, **32**, 242 (2002).
- [39] Hohenberg, P., C., B.I. Halperin, “Theory of dynamic critical phenomena”, *Review of Modern Physics*, **49**, 435 (1977).
- [40] Holmberg, K., P. Anderson et A. Erdemir, “Global energy consumption due to friction in passenger cars”, *Tribology International*, **47**, 221 (2012).
- [41] Hornreich, R., M., M. Luban et S. Shtrikman, “Critical behavior at the onset of \vec{k} -space instability on the λ line”, *Physical Review Letters*, **35**, 1678 (1975).
- [42] Huang, D., M., C. Sendner, D. Horinek, R.R. Netz et L. Bocquet, “Water slippage versus contact angle : a quasiuniversal relationship”, *Physical Review Letters*, **101**, 226101 (2008).
- [43] Israelachvili, J., N., ‘*Intermolecular and surface forces*, Elsevier chap 21 (2011).
- [44] Kamien, R., D., “The geometry of soft materials : a primer”, *Review of Modern Physics*, **74**, 953 (2002).
- [45] Kaoui, B., G. Biros et C. Misbah, “Why do red blood cells have asymmetric shapes even in a symmetric flow?”, *Physical Review Letters*, **103**, 188001 (2009).
- [46] Kardar, M., G. Parisi et Y.-C. Zhang, “Dynamic scaling of growing interfaces”, *Physical Review Letters*, **56**, 889 (1986).
- [47] Kawakatsu, T. et T. Munakata, “Kink dynamics in one-dimensional conserved TDGL system”, *Progress of Theoretical Physics*, **74** (1985).
- [48] Kawasaki, K. et T. Ohta, “Kink dynamics in one-dimensional nonlinear systems”, *Physica*, **116A** (1982).
- [49] Koynova, R. et M. Caffrey, “Phases and phase transitions of the phosphatidylcholines”, *Biochimica et Biophysica Acta*, **1376**, 91 (1998).
- [50] Kuramoto, Y., *Chemical oscillations, waves, and turbulence*, Springer (1984).
- [51] Kwok, R. et E. Evans, “Thermoelasticity of large lecithin bilayer vesicles”, *Biophysical Journal*, **35**, 637 (1981).

- [52] Langer, J., S., “Theory of spinodal decomposition in alloys”, *Annals of Physics*, **65**, 53 (1971).
- [53] Le Goff, T., O. Pierre-Louis et P. Politi, “Kink dynamics with oscillating forces”, *Journal of Statistical Mechanics*, **P08004**, 1742 (2015).
- [54] Le Goff, T., P. Politi et O. Pierre-Louis, “Frozen an order-disorder transition in the dynamics of confined membranes”, *Physical Review E*, **90**, 032114 (2014).
- [55] Le Goff, T., P. Politi et O. Pierre-Louis, “Transition to coarsening for confined one-dimensional interfaces with bending rigidity”, **92**, 022918 (2015).
- [56] Lipowsky, R., “Adhesion of membranes via anchored stickers”, *Physical Review Letters*, **77**, 1652 (1996).
- [57] Lipowsky, R. et E. Sackmann, *Structure and dynamics of membranes*, Elsevier (1995).
- [58] Löcher, M., N. Chatterjee, F. Marchesoni, W.L. Ditto et E.R. Hunt, “Noise sustained propagation : local versus global noise”, *Physical Review E*, **61**, 4954 (2000).
- [59] Lorz, B., G., A.S. Smith, C. Gege et E. Sackmann, “Adhesion of giant vesicles mediated by weak binding of sialyl-LewisX to E-selectin in the presence of repelling poly(ethylene glycol) molecules”, *langmuir*, **23**, 12293 (2007).
- [60] Macías, J., E., M.G. Clerc, C. Falcón et M.A. García-Ñustes, “Spatially modulated kinks in shallow granular layers”, *Physical Review E*, **88**, 020201 (2013).
- [61] Malaquin, L., T. Charitat et J. Daillant, “Supported bilayers : combined specular and diffuse X-ray scattering”, *The European Physical Journal E*, **31**, 285 (2010).
- [62] Marx, S., J. Schilling, E. Sackmann et R. Bruinsma, “Helfrich repulsion and dynamical separation of multicomponent bilayers”, *Physical Review Letters*, **88**, 138102 (2002).
- [63] McCutchen, C., W., “Boundary lubrication by synovial fluid : demonstration and possible osmotic explanation”, *Federation Proceedings*, **25**, 1061 (1966).
- [64] McCutchen, C., W., “The frictional properties of animal joints”, *Wear*, **5**, 1 (1962).
- [65] McMahon, H., T. et J.L. Gallop, “Membrane curvature and mechanisms of dynamic cell membrane remodelling”, *Nature*, **438**, 590 (2005).
- [66] Menes, R., S.A. Safran, “Nonlinear response of membranes to pinning sites”, *Physical Review E*, **56**, 1891 (1997).
- [67] Müller, T., J. et F. Müller-Plathe, “Determining the local shear viscosity of a lipid bilayer system by reverse non-equilibrium molecular dynamics simulations”, *Chem-PhysChem*, **10**, 2305 (2009).
- [68] Murata, K., K. Mitsuoka, T. Hirai, T. Walz, P. Agre, J. B. Heymann, A. Engel et Y. Fujiyoshi, “Structural determinants of water permeation through aquaporin-1”, *Nature*, **407**, 599 (2000).
- [69] Nayfeh, A., H., *Perturbation methods*, Wiley (2008).
- [70] Nepomnyashchy, A., A., “Coarsening versus pattern formation”, *Comptes Rendus Physique*, **16**, 267 (2015).
- [71] Netz, R., R. et R. Lipowsky, “Unbinding symmetric and asymmetric stacks of membranes”, *Physical Review Letters*, **71**, 3569 (1993).

BIBLIOGRAPHIE

- [72] Nicoli, M., R. Cuerno et M. Castro, “Dynamical renormalization group study for a class of non-local interface equations”, *Journal of Statistical Mechanics*, **P10030**, 1742 (2011).
- [73] Noble, P., B. Collin, J. Lecomte-Beckers, A. Magnée, J.-M. Denoix et D. Serteyn, “L’articulation synoviale : un système tribologique parfait”, *Annales de Médecine Vétérinaire*, **154**, 83 (2010).
- [74] O’Brien, F., J., B.A. Harley, M.A. Waller, I.V. Yannas, L.J Gibson et P.J Prendergast, “The effect of pore size on permeability and cell attachment in collagen scaffolds for tissue engineering”, *Technology and Health Care*, **15**, 3 (2007).
- [75] Oron, A., S.H. Davis et S.G. Bankoff, “Long-scale evolution of thin liquid films”, *Reviews of Modern Physics*, **69**, 931 (1997).
- [76] Paluch, E., M. Piel, J. Prost, M. Bornens et C. Sykes, “Cortical actomyosin breakage triggers shape oscillations in cells and cell fragments”, *Biophysical Journal*, **89**, 724 (2005).
- [77] Peletier, L., A. et W.C. Troy, *Spatial patterns, higher order models in physics and mechanics*, Birkhäuser (2001).
- [78] Politi, P. et C. Misbah, “Nonlinear dynamics in one dimension : a criterion for coarsening and its temporal law”, *Physical Review E*, **73**, 036133 (2006).
- [79] Popot, J.-L., J.-P. Changeux, “Nicotinic receptor of acetylcholine : structure of an oligomeric integral membrane protein”, *Physiological Reviews*, **64**, 1162 (1984).
- [80] Rädler, J., O., T.J. Feder, H.H. Strey et E. Sackmann, “Fluctuation analysis of tension-controlled undulation forces between giant vesicles and solid substrate”, *Physical Review E*, **51**, 4526 (1995).
- [81] Rawicz, W., K.C. Olbrich, T. McIntosh, D. Needham et E. Evans, “Effect of chain length and unsaturation on elasticity of lipid bilayers”, *Biophysical Journal*, **79**, 328 (2000).
- [82] Reister-Gottfried, E., K. Sengupta, B. Lorz, E. Sackmann, U. Seifert et A.S. Smith, “Dynamics of specific vesicle-substrate adhesion : from local events to global dynamics”, *Physical Review Letters*, **101**, 208103 (2008).
- [83] Rost, M. et J. Krug, “Anisotropic Kuramoto-Sivashinsky equation for surface growth and erosion”, *Physical Review Letters*, **75**, 3894 (1995).
- [84] Roux, D., F. Nallet et O. Diat, “Rheology of lyotropic lamellar phases”, *Europhysics Letters*, **24**, 33 (1993).
- [85] Rozycki, B., R. Lipowsky et T.R. Weike, “Segregation of receptor-ligand complexes in cell adhesion zones : phase diagrams and the role of thermal membranes roughness”, *New journal of Physics*, **12**, 095003 (2010).
- [86] Saarakkala, S., S.-Z. Wang, Y.P. Huang et Y.P. Zheng, “Quantification of the optical surface reflection and surface roughness of articular cartilage using optical coherence tomography”, *Physics in Medicine and Biology*, **54**, 6837 (2009).
- [87] Schmid, F., “Are stress-free membranes really “tensionless”?”, *Europhysics Letters*, **95**, 28008 (2011).

- [88] Seifert, U., “Fluid membrane in hydrodynamic flow fields : formalism and an application to fluctuating quasispherical vesicles in shear flow”, *The European Physical Journal B*, **8**, 405 (1999).
- [89] Sengupta, K. et L. Limozin, “Adhesion of soft membranes controlled by tension and interfacial polymers”, *Physical Review Letters*, **104**, 088101 (2010).
- [90] Siggia, E., D., “Late stages of spinodal decomposition in binary mixtures”, *Physical review A*, **20**, 595 (1979).
- [91] Sivashinsky, G., I., “Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **15**, 179 (1983).
- [92] Sneppen, K., J. Kung, M.H. Jensen, C. Jayaprakash et T. Bohr, “Dynamic scaling and crossover analysis for the Kuramoto-Sivashinsky equation”, *Physical Review A*, **46**, 12 (1992).
- [93] Speck, T. et R.L.C. Vink, “Random pinning limits the size of membrane adhesion domains”, *Physical Review E*, **86**, 031923 (2012).
- [94] Swain, P., S. et D. Andelman, “Supported membranes on chemically structured and rough surfaces”, *Physical Review E*, **63**, 051911 (2001).
- [95] Swann, D., A., K.J. Bloch, D. Swindell et E. Shore, “The lubricating activity of human synovial fluids”, *Arthritis Rheum*, **27**, 552 (1984).
- [96] Swift, J. et P.C. Hohenberg, “Hydrodynamic fluctuations at the convective instability”, *Physical Review A*, **15**, 319 (1977).
- [97] Thomas, B., H., J.C. Fryman, K. Liu et J. mason, “Hydrophilic-hydrophobic hydrogels for cartilage replacement”, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, **2**, 588 (2009).
- [98] Vanitha, M. et M. Daniel, “Internal nonlinear dynamics of a short lattice DNA model in terms of propagating kink-antikink solitons”, *Physical Review E*, **85**, 041911 (2012).
- [99] Veatch, S., L. et S.L. Keller, “Miscibility phase diagrams of giant vesicles containing sphingomyelin”, *Physical Review Letters*, **94**, 148101 (2005).
- [100] Vlahovska, P., M. et R.S. Gracia, “Dynamics of a viscous vesicle in linear flows”, *Physical Review E*, **75**, 016313 (2007).
- [101] Von Hansen, Y., S. Gekle et R.R. Netz, “Anomalous anisotropic diffusion dynamics of hydration water at lipid membranes”, *Physical Review Letters*, **111**, 118103 (2013).
- [102] Watson, S., J., F. Otto, B.Y. Rubinstein et S.H. Davis, “Coarsening dynamics of the convective Cahn-Hilliard equation”, *Physica D*, **178** (2003).
- [103] Whitham, G., B., *Linear and nonlinear waves*, John Wiley & sons, p96 (1974).
- [104] Zhong-Can O., Y. et W. Helfrich, “Bending energy of vesicle membranes : general expressions for the first, second, and third variation of the shape energy and applications to spheres and cylinders”, *Physical Review A*, **39**, 5280 (1989).
- [105] Zuckerman, D., R. Bruinsma, “Statistical mechanics of membrane adhesion by reversible molecular bonds”, *Physical Review Letters*, **74**, 3900 (1995).